УДК 330.4

Мамонов О. В. Решение задачи об использовании двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции, с учётом влияния минимальной относительной нормы производства одного вида продукции к другому и минимальной нормы выпуска продукции второго вида

The solution of the problem of using two resources for an enterprise that produces two types of products, taking into account the influence of the minimum relative rate of production of one type of product to another and the minimum rate of output of the second type

Мамонов Олег Владимирович
ФБГОУ ВО «Новосибирский ГАУ»
Mamonov Oleg Vladimirovich
FBGOU VO "Novosibirsk GAU"

Аннотация. *В работе рассматривается математическое обеспечение задачи исследования влияния двух факторов: минимальной относительной нормы производства одного вида продукции по отношению к другому виду и минимальной нормы выпуска второго вида. Поставленная задача для двух видов ресурсов рассматривается как задача линейного программирования, является модифицированной задачей использования ресурсов. Для решения задачи используются коэффициенты модели, определяющие относительный расход ресурсов по каждому виду продукции и относительный расход ресурса на единицу второго вида продукции к первому. Для удобного исследования решения поставленной задачи вводятся понятия предпочтительности ресурсов и видов продукции. Последовательно решается задача от влияния факторов производства на оптимальный выпуск продукции. Сначала рассматривается решение задачи при влиянии обоих факторов производства. По решению прямой задачи определяется решение двойственной задачи. Потом решается последовательно задача при влиянии одного фактора производства, сначала минимальной относительной нормы производства продукции первого вида по отношению ко второму, потом минимальной нормы впуска продукции второго вида. Следующим шагом исследования является решение задачи без влияния факторов на оптимальный впуск продукции. Заканчивается исследование определения разрешимости поставленной задачи при заданных условиях использования ресурсов и влияния факторов производства.*

Ключевые слова. *Задача об использовании ресурсов, задача линейного программирования, модифицированная задача использования ресурсов, минимальная норма выпуска продукции, минимальная относительная норма выпуска продукции одного вида продукции к другому, относительный расход ресурса в производстве одного вида продукции к другому, относительный расход одного ресурса ко второму ресурсу в производстве данного вида продукции, оценка влияния фактора на доход предприятия, отношение запасов ресурсов, отношение дохода продукции одного вида к другому, отношение предпочтение ресурсов в впуске продукции данного вида, предпочтение использования ресурса в выпуске двух видов продукции, предельная полезность ресурса, дефицитный ресурс, избыточный ресурс, неразрешимость задачи о влияния факторов производства.*

Abstract. *The paper considers the mathematical support of the problem of investigating the influence of two factors: the minimum relative rate of production of one type of product in relation to another type and the minimum rate of output of the second type. The task for two types of resources is considered as a linear programming task, it is a modified task of using resources. To solve the problem, the coefficients of the model are used that determine the relative consumption of resources for each type of product and the relative resource consumption per unit of the second type of product to the first. For a convenient study of the solution of the problem posed, the concepts of the preferences of resources and types of products are introduced. The problem is solved consistently from the influence of factors of production on the optimal output of products. First, we consider the solution of the problem under the influence of* *both factors of production. The solution of the direct problem determines the solution of the dual problem. Then the problem is solved successively under the influence of one factor of production, at first the minimum relative rate of production of the first type with respect to the second, then the minimum rate of admission of products of the second type. The next step in the study is to solve the problem without affecting the factors involved in the optimal intake of products. The investigation of the definition of the solvability of the task in question is completed under given conditions for the use of resources and the influence of production factors.*

Keywords. *The task of using resources, the task of linear programming, the modified task of using resources, the minimum rate of output, the minimum relative rate of output of one type of product to another, the relative resource consumption in the production of one type of product to another, the relative expenditure of one resource to the second resource in production of this type of product, an assessment of the influence of the factor on the enterprise's income, the ratio of the resource reserves, the ratio of the income of production of one type to another, the ratio preference of resources in the intake of this type of product, the preference of resource use in the production of two types of products, the marginal utility of the resource, scarce resource, excessive resource insolubility of the problem of the influence of factors of production.*

Введение

Исследования оптимизации производства при потреблении ресурсов используются математические методы, в частности используется задача об использовании ресурсов. Не только потребление ресурсов влияет на оптимальный план производства, возможно влияние различных факторов, как внешних, например, условия реализации продукции и закупка ресурсов предприятиям, так и внутренние, связанные с особенностями производства продукции. В статье [1] рассмотрено влияние на производство продукции таких факторов, как минимальная относительная норма впуска продукции A_1 к продукции A_2 и минимальная норма выпуска продукции A_2. В качестве производителя рассматривается предприятие, выпускающее два вида продукции, использующее два вида ресурсов. В качестве факторов, которые могут оказывать влияние на выпуск продукции, выбираются минимальные нормы: минимальная относительная норма впуска продукции A_1 к продукции A_2 и минимальная норма выпуска продукции A_2. Полное исследование потребления ресурсов в подобном производстве, без влияния других факторов рассматривается в работе [2], в которой сформулирована задача об использовании двух ресурсов предприятием, выпускающим два вида продукции. В [1] сформулирована задача влияния двух указанных факторов и построена её модель, как модифицированная модель задачи об использовании ресурсов, которая также является задачей линейного программирования. Исследование влияния внешних факторов, таких, как спрос, рассмотрены в статьях [3] и [4]. В данной работе приведено математическое обеспечение решения задачи об использовании ресурсов с учётом влияния названных факторов, использованы математические методы её решения.

1. Постановка задачи о влиянии факторов на выпуск продукции и анализ коэффициентов модифицированной модели

1.1. Постановка задачи о влиянии факторов

Сформулируем задачу, которая рассматривалась в [1].

Пусть предприятие производит два вида продукции A_1 и A_2, используя два ресурса вида R_1 и R_2. Запас ресурса R_1 на предприятии равняется b_1 единиц, ресурса R_2 – b_2 единиц. Расход ресурсов на единицу продукции вида A_1 равняется a_{11} единицы для ресурса R_1 и a_{21} единицы для ресурса R_2. На единицу продукции A_2 расходуется a_{12} единиц ресурса R_1 и a_{22} единиц ресурса R_2.

По технологическим условиям продукции вида A_1 должно производиться по крайней мере в β_0 раза больше, чем продукции вида A_2, а минимальная норма производства продукции A_2 равна n единиц.

Перед предприятием ставится цель: определить план выпуска продукции, при котором оно получит максимальный доход, если доход от реализации продукции вида A_1 составляет c_1 руб., а продукции вида A_2 составляет c_2 руб.

Модифицированной модель задачи об оптимальном использовании ресурсов в виде пары двойственных задач линейного программирования с параметрами b_1, b_2, β_0 и n имеет вид, который сформулирован ниже в виде пары двойственных задач.

Прямая задача представляется в следующем виде.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \leq b_2 \\ x_1 & -\beta_0 x_2 & \geq 0 \\ & x_2 & \geq n_1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$Z = \quad c_1x_1 \quad +c_2x_2 \quad \to max$$

Для прямой задачи составляем двойственную задачу.

$$\begin{cases} a_{11}u_1 & +a_{12}u_2 & +u_3 & & \geq c_1 \\ a_{11}u_1 & +a_{22}u_2 & -\beta_0 u_3 & +u_4 & \geq c_2 \end{cases}$$

$$u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0 \quad u_3 \leq 0 \quad u_4 \leq 0$$

$$W = \quad b_1u_1 \quad +b_2u_2 \quad\quad +nu_4 \quad \to min$$

Для сформулированной задачи линейного программирования найти решения пары двойственных задач в зависимости от параметров задачи: b_1, b_2, β_0 и n.

Анализ решения задачи будем проводить в зависимости от влияния факторов производства. Сначала рассмотрим производства, когда на выпуск продукции влияют оба фактора, потом только одного, после этих вариантов производства рассмотрим производство, когда влияние на оптимальный план факторов производства не наблюдается. Завершим исследование изучением вопроса разрешимости задачи при заданных условиях.

Для анализа решения задачи используем коэффициенты модели, которые рассмотрим ниже.

1.2. Анализ коэффициентов модифицированной модели

Опредепределим коэффициенты в модели, с помощью которых будем рассматривать решение задачи при различных значениях параметров. Эти коэффициенты также были предложены и в работе [1], и в работе [2].

Первая группа коэффициентов – это коэффициенты, определяющие относительный расход для каждого ресурса в производстве продукции вида A_2 к продукции A_1, коэффициент k_1 равный отношению $\frac{a_{12}}{a_{11}}$, коэффициент k_2 равный отношению $\frac{a_{22}}{a_{21}}$.

Вторая группа коэффициентов – это коэффициенты, определяющие относительный расход ресурсов R_1 и R_2 в производстве каждого вида продукции, коэффициент β_1 равный отношению $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, коэффициент β_2 равный отношению $\frac{a_{22}}{a_{12}}$. По умолчанию положим, что $\beta_1<\beta_2$.

В третью группу коэффициентов включим отношение дохода от реализации единицы продукции вида A_2 к доходу от реализации единицы продукции вида A_1, коэффициент k равный отношению $\frac{c_2}{c_1}$, и отношение запасов ресурсов вида R_2 и R_1, коэффициент β, равный отношению $\frac{b_2}{b_1}$.

В [2] доказывалось, что если $\beta_1<\beta_2$, то $k_1<k_2$. Поэтому по умолчанию будем полагать, что и $k_1<k_2$.

Случай, когда $\beta_1=\beta_2$ ($k_1=k_2$) приводит к задаче использования одного ресурса. Этот вопрос рассматривался в работе [5].

1.3. Отношение предпочтения выпуска продукции и использования ресурсов

Определим отношение предпочтения для видов продукции при использовании данного вида ресурса и отношение предпочтения использования ресурсов для данного вида продукции. Эти отношения полезно использовать при исследовании производства продукции как с влиянием факторов производства, так и без их влияния.

Пусть для данного ресурса k_0 – коэффициент расхода ресурса на продукцию A_2 по отношению к A_1. Будем говорить, что для предприятия выпуск продукции A_1 предпочтительнее, чем A_2, если $k<k_0$. Если $k>k_0$, то будем говорить, что выпуск продукции A_2 предпочтительнее, чем A_1. При $k=k_0$, предпочтение между видами продукции нет.

Пусть для данного вида продукции $\beta^{(0)}$ – коэффициент пропорциональности расхода ресурса R_2 на продукцию данного вида относительно ресурса R_1. Будем говорить, что для предприятию в производстве данного вида продукции использование ресурса R_1 предпочтительнее, чем R_2, если $\beta<\beta^{(0)}$. Если $\beta>\beta^{(0)}$, то будем говорить, что в производстве данного вида продукции использование ресурса R_2 предпочтительнее, чем R_1. При $\beta=\beta^{(0)}$, предпочтение между видами ресурсов нет.

Целесообразность использования отношение предпочтения рассматривалось в статье [4], где определялись коэффициенты оценки полезности ресурсов в производстве каждого вида продукции y_{ij}. Этот коэффициент равен отношению $\frac{c_j}{a_{ij}}$, где c_j – доход от реализации единицы продукции вида A_j, a_{ij} – удельный расход ресурса R_i на продукцию A_j.

2. Выпуск продукции, когда наблюдается влияние двух факторов

Рассмотрим оптимальное решение пары двойственных задач, когда наблюдается влияние обоих рассматриваемых факторов, и минимальной относительной нормы β_0, и минимальной нормы n. Тогда продукция A_2 выпускается в количестве n, а продукция A_1 – в количестве $n\beta_0$. Оптимальный план выпуска продукции будет $X^*=(n\beta_0; n)$. Дополнительные переменные ограничений факторов равны $y_3^*= y_4^*=0$. Вычислим максимальный доход предприятия: $Z_{max}=c_1\beta_0 n + c_2 n$. Так как $c_2 = c_1 k$, то $Z_{max}=c_1 n(\beta_0 + k)$.

Решение задачи также определяется статусами используемых ресурсов. Возможны три варианта статусов. Первый вариант – оба ресурса являются дефицитными. Второй вариант – ресурс R_1 дефицитный, а ресурс R_2 избыточный. И третий вариант – наоборот, ресурс R_2 дефицитный, ресурс R_1 избыточный. Последовательно рассмотрим все три варианта.

2.1. Оба ресурса дефицитные

Пусть производство определяется двумя дефицитными ресурсами. Они расходуются при оптимальном плане полностью, потому их остатки равны нулю: $y_1^*=y_2^*=0$. Для всех ограничений задачи получаем, что $y_1^*=y_2^*=y_3^*= =y_4^*=0$. Оптимальный план удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & = b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & = b_2 \\ x_1^* & -\beta_0 x_2^* & = 0 \\ & x_2^* & = n \end{cases}$$

. Из этих уравнений следует, что запасы ресурсов равны минимальным количествам, чтобы выпустить продукцию по технологическим нормам: $b_1 = b_{01}, b_2 = b_{02}$.

Перейдём к решению двойственной задачи. Так как объёмы выпускаемой продукции при оптимальном плане не равны нулю, то оба ограничения двойственной задачи являются равенствами:

$$\begin{cases} a_{11}u_1^* & +a_{12}u_2^* & +u_3^* & & = c_1 \\ a_{11}u_1^* & +a_{22}u_2^* & -\beta_0 u_3^* & +u_4^* & = c_2 \end{cases}$$

. В первом уравнении выразим u_3^* через u_1^* и u_2^*: $u_3^* = c_1 - a_{11}u_1^* - a_{21}u_2^*$. Подставим выражение для u_3^* во второе уравнение: $a_{12}u_1^* + a_{22}u_2^* - \beta_0(c_1 - a_{11}u_1^* - a_{21}u_2^*) + u_4^* = c_2$.

В полученном уравнении выражаем u_4^* через u_1^* и u_2^*: $u_4^* = c_2 + c_1\beta_0 - a_{12}u_1^* - a_{22}u_2^* - \beta_0 a_{11}u_1^* - \beta_0 a_{21}u_2^*$. Так как $c_2 = kc_1$, то

$u_4^* = c_1(\beta_0 + k) - u_1^*(a_{12} + a_{11}\beta_0) - u_2^*(a_{22} + a_{21}\beta_0) = c_1(\beta_0 + k) - a_{11}u_1^*(k_1 + \beta_0) - a_{21}u_2^*(k_2 + \beta_0)$. Положим, что $u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}} \cdot \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t$, $u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}} \cdot \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s$, тогда $u_4^* = c_1(\beta_0 + k)(1 - t - s)$. Так как $u_1^* \geq 0$ и $u_1^* \geq 0$, то $t \geq 0$ и $s \geq 0$.

Подставим u_1^* и u_2^* в первое уравнение: $u_3^* = c_1 - c_1 \cdot \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t - c_1 \cdot \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s = c_1\left(1 - \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t - \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s\right)$.

Так как $u_3^* \leq 0$ и $u_4^* \leq 0$, то $1 - t - s \leq 0$ и $1 - \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t - \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s \leq 0$. Из этих неравенств получаем условия для s и t:

$$\begin{cases} t + s \geq 1 \\ \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s \geq 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим системы в зависимости от значений параметра k.

Если $k \leq k_1$, то $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t \leq \frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_1} \cdot t = t$ и $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot s < \frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_2} \cdot s = s$. Тогда, при $k \leq k_1$ для переменных s и t, при значениях $t \geq 0$, $s \geq 0$, справедливо утверждение: если $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s \geq 1$, то $t + s \geq 1$. Поэтому для переменных s и t выполняются условия: $t \geq 0$, $s \geq 0$ и $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s \geq 1$.

Теперь пусть $k_1 < k < k_2$, тогда $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t > \frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_1} \cdot t = t$, а $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s < \frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_2} \cdot s = s$. Ограничения определяются в зависимости от значения t.

Найдём точку пересечения прямых $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s = 1$ и $t + s = 1$ на плоскости $t0s$. Из второго уравнения выразим s через t: $s=1-t$. Подставим s в первое уравнение: $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot (1-t) = 1$. Находим t: $t\left(\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} - \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}\right) = 1 - \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \rightarrow t(\beta_0+k)\frac{k_2-k_1}{\beta_0+k_1} = k_2 - k \rightarrow t = \frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k} \cdot \frac{k_2-k}{k_2-k_1}$. Выражение $\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k} \cdot \frac{k_2-k}{k_2-k_1}$ обозначим t_0 $\left(t_0 = \frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k} \cdot \frac{k_2-k}{k_2-k_1}\right)$.

Найдём для t_0 значение параметра s: $s = 1 - \frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k} \cdot \frac{k_2-k}{k_2-k_1}$. Тогда: $s = \frac{(\beta_0+k)(k_2-k_1)-(\beta_0+k_1)(k_2-k)}{(\beta_0+k)(k_2-k_1)} \rightarrow s = \frac{\beta_0(k_2-k_1)+k(k_2-k_1)-\beta_0(k_2-k)-k_1(k_2-k)}{(\beta_0+k)(k_2-k_1)} \rightarrow s = \frac{\beta_0(k-k_1)+k_2(k-k_1)}{(\beta_0+k)(k_2-k_1)}$ $\rightarrow s = \frac{(\beta_0+k_2)(k-k_1)}{(\beta_0+k)(k_2-k_1)}$. Выражение $\frac{(\beta_0+k_2)(k-k_1)}{(\beta_0+k)(k_2-k_1)}$ обозначим s_0 $\left(s_0 = \frac{(\beta_0+k_2)(k-k_1)}{(\beta_0+k)(k_2-k_1)}\right)$.

Итак, решение системы неравенств можно записать так:

при $0 \le t \le \frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k} \cdot \frac{k_2-k}{k_2-k_1}$ параметр $s \ge \frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k} - \frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_1} t$;

при $\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k} \cdot \frac{k_2-k}{k_2-k_1} \le t \le 1$ параметр $s \ge 1$;

при $t \ge 1$ параметр $s \ge 0$.

Рассмотрим случай, когда $k \ge k_2$. Тогда $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t \ge \frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_1} \cdot t = t$ и $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot s \ge \frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_2} \cdot s = s$. Для переменных s и t, когда они принимают значения $t \ge 0$, $s \ge 0$, справедливо утверждение: если $t + s \ge 1$, то $\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1} \cdot t + \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2} \cdot s \ge 1$. Для переменных s и t выполняются условия: $t \ge 0$, $s \ge 0$ и $t + s \ge 1$.

2. 2. Ресурс R_1 дефицитный, ресурс R_2 избыточный

Теперь положим, что только ресурс R_1 дефицитный. Он расходуется полностью, его остаток равен, а остаток ресурса R_2 больше нуля: $y_1^*=0$, $y_2^*>0$. Для всех ограничений задачи получаем, что $y_1^*=y_3^*=y_4^*=0$, $y_2^*>0$. Оптимальный план удовлетворяет системе уравнений и неравенства:

$\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & = b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & > b_2 \\ x_1^* & -\beta_0 x_2^* & = 0 \\ & x_2^* & = n \end{cases}$. Значение запаса ресурса R_1 равно b_{01}. Остаток ресурса R_2 равен $y_2^* = b_1\left(\beta - \beta_1 \frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_1}\right)$. Для отношения запасов ресурсов β выполняется условие $\beta > \beta_1 \frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_1}$.

Объёмы выпускаемой продукции, как и в пункте 2. 1, не равны нулю. Оба ограничения двойственной задачи являются равенствами. Так как остаток ресурса R_2 не равен нулю, то его предельная полезность равна нулю ($u_2^*=0$). Решение двойственной задачи определяется системой уравнений: $\begin{cases} a_{11}u_1^* & +u_3^* & & = c_1 \\ a_{12}u_1^* & -\beta_0 u_3^* & +u_4^* & = c_2 \end{cases}$. В первом уравнении выразим переменную u_3^* и подставим во второе уравнение. Из первого уравнения: $u_3^* = c_1 - a_{11}u_1^*$. Подставляем во второе уравнение: $a_{12}u_1^* - \beta_0(c_1 - a_{11}u_1^*) + u_4^* = c_2$. Выражаем u_4* через u_1*: $u_4^* = c_2 + c_1\beta_0 - a_{12}u_1^* - \beta_0 a_{11}u_1^*$. Так как $c_2 = kc_1$, то $u_4^* = c_1(\beta_0 + k) - u_1^*(a_{12} + a_{11}\beta_0) = c_1(\beta_0 + k) - a_{11}u_1^*(k_1 + \beta_0)$.

Положим, что оценка предельной полезности ресурса R_1 равна u_1*=$\frac{c_1 t}{a_{11}}$, тогда оценка влияния минимальной относительной нормы равна u_3*=$-c_1(t-1)$, где t≥1, а оценка влияния минимальной нормы впуска продукции вида A_2 равна u_4*=$-c_1(t(\beta_0 + k_1) - \beta_0 - k)$, где $t \geq \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}$. Отметим, что решение задача не имеет, когда $k<k_1$. При $k=k_1$, t≥1, при $k>k_1$, $t \geq \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}$.

2. 3. Ресурс R_2 дефицитный, ресурс R_1 избыточный

Теперь положим, что только ресурс R_1 дефицитный. Он расходуется полностью, его остаток равен, а остаток ресурса R_2 больше нуля: y_1*=0, y_2*>0. Для всех ограничений задачи получаем, что y_2*=y_3*=y_4*=0, y_1*>0. Оптимальный план удовлетворяет системе уравнений и неравенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & > b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & = b_2 \\ \quad x_1^* & -\beta_0 x_2^* & = 0 \\ & \quad x_2^* & = n \end{cases}$$

. Значение запаса ресурса R_2 равно b_{02}. Остаток ресурс R_2 равен y_1*=$b_1 - a_{11}n(\beta_0 + k_1)$. Для отношения запасов ресурсов β выполняется условие $\beta<\beta_1 \frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_1}$.

Так же, как и в пунктах 2. 1 и в 2. 2 оба ограничения двойственной задачи являются равенствами. Так как остаток ресурса R_1 не равен нулю, то его предельная полезность равна нулю (u_1*=0). Решение двойственной задачи определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} a_{21}u_2^* & +u_3^* & & = c_1 \\ a_{22}u_2^* & -\beta_0 u_3^* & +u_4^* & = c_2 \end{cases}$$

. Так же, как в пункте 2. 2, в первом уравнении выразим переменную u_3* и подставим её значение во второе уравнение. Из первого уравнения: $u_3^* = c_1 - a_{21}u_2^*$. Подставляем во второе уравнение: $a_{22}u_2^* - \beta_0(c_1 - a_{21}u_2^*) + u_4^* = c_2$. Выражаем u_4* через u_2*: $u_4^* = c_2 + c_1\beta_0 - a_{22}u_2^* - \beta_0 a_{21}u_2^*$. Так как $c_2 = kc_1$, то $u_4^* = c_1(\beta_0 + k) - u_2^*(a_{22} + a_{21}\beta_0) = c_1(\beta_0 + k) - a_{21}u_2^*(k_2 + \beta_0)$.

Положим, что оценка предельной полезности ресурса R_2 равна u_2*=$\frac{c_2 t}{a_{21}}$, тогда оценка влияния минимальной относительной нормы равна u_3*=$-c_1(t-1)$, где t≥1, а оценка влияния минимальной нормы выпуска продукции вида A_2 равна u_4*=$-c_1(t(\beta_0 + k_2) - \beta_0 - k)$, где $t \geq \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}$. Отметим, что решение задача не имеет, когда $k<k_2$. При $k=k_2$, t≥1, при $k>k_2$, $t \geq \frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}$.

3. Производство продукции при влиянии только одного из двух факторов

Теперь перейдём к рассмотрению решения пары двойственных задач, когда влияет только один фактор, или минимальная относительная норма β_0, или минимальная норма n.

3.1. Производство продукции при влиянии только минимальной относительной нормы β_0 выпуска продукции вида A_1 к продукции вида A_2

Перейдём к рассмотрению производства, когда при оптимальном плане наблюдается влияние минимальной относительной нормы выпуска продукции A_1 по отношению к продукции A_2. Тогда третье ограничение в прямой задачи будет равенством (y_3*=0), откуда мы получим условие, что x_1*=$\beta_0 x_2$*. Так же как и в параграфе 2 просмотрим три варианта производства продукции: оба ресурса являются дефицитными, ресурс R_1 дефицитный, а ресурс R_2 избыточный, ресурс R_2 дефицитный, ресурс R_1 избыточный.

3.1. Оба ресурса дефицитные

Пусть оба ресурса дефицитные. Так же, как и в пункте 2. 1, они расходуются при оптимальном плане полностью, потому их остатки равны нулю: y_1*=y_2*=0. Для всех ограничений задачи получаем, что y_1*=y_2*=y_3*=0, y_4>0. Оптимальный план удовлетворяет системе уравнений и неравенства: $\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & = b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & = b_2 \\ x_1^* & -\beta_0 x_2^* & = 0 \\ & x_2^* & > n \end{cases}$. Из третьего уравнения следует, что x_1*=$\beta_0 x_2$*. Подставим выражение для x_1* в первое уравнение и найдём x_2*: $a_{11}\beta_0 x_2^* + a_{12}x_2^* = b_1$. Получаем, что $x_2^* = \frac{b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$, так как $a_{12}=k_1a_{11}$. Теперь находим значение x_1*: $x_1^* = \frac{\beta_0 b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$. Таким образом, оптимальным будет план: X*=$\left(\frac{b_1\beta_0}{a_{11}(\beta_0+k_1)}; \frac{b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}\right)$. Подставим оптимальное решение во второе уравнение: $\frac{a_{21}\beta_0 b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)} + \frac{a_{22}b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)} = b_2$. Учитывая, что $a_{22}=k_2a_{21}$, $a_{21}=\beta_1 a_{11}$, $b_2=\beta b_1$, найдём условия для параметров уравнения. Получаем: $\beta b_1 = \frac{\beta_1\beta_0 b_1}{\beta_0+k_1} + \frac{\beta_1 k_2 b_1}{\beta_0+k_1}$. Вынося за скобки в правой части сомножители β_1 и b_1 и сокращая обе части уравнения на b_1, получаем, что полный расход обоих ресурсов возможен, если β=$\beta_1\frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_1}$. Определим значение y_4*: $y_4^* = n - \frac{b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$= =$-\frac{b_1 - na_{11}(\beta_0+k_1)}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$. Отрицательность y_4* означает, что $b_1 - na_{11}(\beta_0+k_1) > 0$. Последнее неравенство определяет, что запас ресурса R_1 больше b_{01} (b_1>b_{01}). Аналогично можно сказать и для ресурса R_2: запас ресурса R_2 больше b_{02} (b_2>b_{02}).

Вычислим максимальный доход предприятия: Z_{max}=$c_1\frac{b_1\beta_0}{a_{11}(\beta_0+k_1)} + c_2\frac{b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$. Так как c_2=k_1c_1, то Z_{max}=$\frac{b_1c_1(\beta_0+k)}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$.

Перейдём к решению двойственной задачи. Так как четвёртое ограничение прямой задачи при оптимальном плане является неравенством, то u_4*=0. Объёмы выпускаемой продукции при оптимальном плане не равны нулю. Оба ограничения двойственной задачи являются равенствами: $\begin{cases} a_{11}u_1^* & +a_{21}u_2^* & +u_3^* & = c_1 \\ a_{12}u_1^* & +a_{22}u_2^* & -\beta_0 u_3^* & = c_2 \end{cases}$. В первом уравнении выразим переменную u_3* и подставим её значение во второе уравнение. Из первого уравнения: $u_3^* = c_1 - a_{11}u_1^* - a_{21}u_2^*$. Подставим её значение во второе уравнение: $a_{12}u_1^* + a_{22}u_2^* - \beta_0(c_1 - a_{11}u_1^*c_1 - a_{21}u_2^*) = c_2$. Преобразуем уравнение: $u_1^*(a_{12} + \beta_0 a_{11}) + u_2^*(a_{22} + \beta_0 a_{21}) = c_2 + c_1\beta_0$. Так как $a_{12} = k_1a_{11}$, $a_{22} =$

k_2a_{21}, $c_2 = kc_1$, то $a_{11}u_1^*(k_1+\beta_0) + a_{21}u_2^*(k_2+\beta_0) = c_1(k+\beta_0)$. Положим, оценки u_1* и u_2* равны: u_1*=$\frac{c_1(k+\beta_0)t}{a_{11}(k_1+\beta_0)}$, u_2*=$\frac{c_1(k+\beta_0)(1-t)}{a_{21}(k_2+\beta_0)}$. Так как u_1*≥0, то t≥0, а так как u_2*≥0, то 1–t≥0. Тогда значение параметра t лежит в пределах от нуля до единицы: $0 \le t \le 1$. Находим значение оценки влияния минимальной относительной нормы: $u_3^* = c_1 - a_{11}\frac{c_1(k+\beta_0)t}{a_{11}(k_1+\beta_0)} - a_{21}\frac{c_1(k+\beta_0)(1-t)}{a_{21}(k_2+\beta_0)}$=$c_1\left(1 - \frac{(k+\beta_0)t}{k_1+\beta_0} - \frac{(k+\beta_0)(1-t)}{k_2+\beta_0}\right)$ или u_3*=$-c_1 \cdot \frac{k+\beta_0}{k_2+\beta_0}\left(\frac{k-k_2}{k+\beta_0} - t \cdot \frac{k_2-k_1}{k_1+\beta_0}\right)$, где $t \le \frac{k-k_2}{k_2-k_1} \cdot \frac{k_1+\beta_0}{k+\beta_0}$.

Найдём значение параметра t, когда $\frac{k-k_2}{k_2-k_1} \cdot \frac{k_1+\beta_0}{k+\beta_0} \le 1$. Из неравенства следует: $(k - k_2)(k_1+\beta_0) \le (k_2-k_1)(k+\beta_0) \rightarrow kk_1 + k\beta_0 - k_1k_2 - \beta_0k_2 \le kk_2 + k_2\beta_0 - k_1k - \beta_0k_1 \rightarrow 2kk_1 - kk_2 + k\beta_0 \le k_1k_2 + 2k_2\beta_0 - \beta_0k_1 \rightarrow k(2k_1 - k_2 + \beta_0) \le k_1k_2 + 2k_2\beta_0 - \beta_0k_1 \rightarrow k \le \frac{k_2(k_1+\beta_0)+\beta_0(k_2-k_1)}{k_1+\beta_0-(k_2-k_1)}$.

Сравним значение $\frac{k_2(k_1+\beta_0)+\beta_0(k_2-k_1)}{k_1+\beta_0-(k_2-k_1)}$ и k_2.

Если $\frac{k_2(k_1+\beta_0)+\beta_0(k_2-k_1)}{k_1+\beta_0-(k_2-k_1)} \ge k_2$, то $k_2(k_1+\beta_0) + \beta_0(k_2-k_1) \ge k_2\big(k_1+\beta_0-(k_2-k_1)\big)$. Из неравенства следует, что $\beta_0(k_2-k_1) \ge -k_2(k_2-k_1)$ или $(\beta_0+k_2)(k_2-k_1) \ge 0$. Последнее неравенство справедливо при k_2>k_1.

При k<k_2 задача решения не имеет, при k>k_2 параметры t удовлетворяет неравенству $0 \le t \le \frac{k-k_2}{k_2-k_1} \cdot \frac{k_1+\beta_0}{k+\beta_0}$, если $k \le \frac{k_2(k_1+\beta_0)+\beta_0(k_2-k_1)}{k_1+\beta_0-(k_2-k_1)}$, и неравенству $0 \le t \le 1$, если $k > \frac{k_2(k_1+\beta_0)+\beta_0(k_2-k_1)}{k_1+\beta_0-(k_2-k_1)}$.

3. 2. Ресурс R_1 дефицитный, ресурс R_2 избыточный

Рассмотрим, когда дефицитным при оптимальном плане является только один ресурс. Положим, что только ресурс R_1 дефицитный. Он расходуется полностью, его остаток равен нулю, а остаток ресурса R_2 больше нуля: y_1*=0, y_2*>0. Для всех ограничений задачи получаем, что y_1*=y_3=0, y_2*>0, y_4*<0. Оптимальный план удовлетворяет системе уравнений и неравенств: $\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & = b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & > b_2 \\ x_1^* & -\beta_0x_2^* & = 0 \\ & x_2^* & > n \end{cases}$. Как и в случае дефицитности двух ресурсов x_1*=β_0x_2*. Подставим выражение для x_1* в первое уравнение и найдём x_2*: $a_{11}\beta_0x_2^* + a_{12}x_2^* = b_1$. Получаем, что $x_2^* = \frac{b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$, так как a_{12}=k_1a_{11}, а x_1* равно: $x_1^* = \frac{\beta_0b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$. Таким образом, оптимальным будет план: X*=$\left(\frac{b_1\beta_0}{a_{11}(\beta_0+k_1)}; \frac{b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}\right)$. Найдём остаток ресурса R_2. Подставляем x_1* и x_2* в y_2*: y_2*=$b_2 - \frac{a_{21}b_1\beta_0}{a_{11}(\beta_0+k_1)} - \frac{a_{22}b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$. Так как b_2=βb_1, a_{21}=β_1a_{11}, а a_{22}=k_2a_{21}, то y_2*=$b_1\left(\beta - \beta_1\frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_1}\right)$. Для отношения запасов ресурсов β выполняется условие β>$\beta_1\frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_1}$. Опять определяем значение y_4*: $y_4^* = n - \frac{b_1}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$=$-\frac{b_1-na_{11}(\beta_0+k_1)}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$. Отрицательность y_4* означает, что $b_1 - na_{11}(\beta_0 + k_1) > 0$. Последнее неравенство определяет, что запас ресурса R_1 больше b_{01} (b_1>b_{01}).

Оптимальный план при одном дефицитном ресурсе и при двух дефицитных ресурсах одинаковые. Поэтому и значение целевых функций будут одинаковыми: $Z_{\max}=\frac{b_1 c_1(\beta_0+k)}{a_{11}(\beta_0+k_1)}$.

Объёмы выпускаемой продукции не равны нулю. Оба ограничения двойственной задачи являются равенствами. Так как остаток ресурса R_2 не равен нулю, то его предельная полезность равна нулю (u_2*=0). Решение двойственной задачи определяется системой уравнений: $\begin{cases} a_{11}u_1^* & +u_3^* & =c_1 \\ a_{12}u_1^* & -\beta_0 u_3^* & =c_2 \end{cases}$. В первом уравнении выразим переменную u_3* и подставим во второе уравнение. Из первого уравнения: $u_3^*=c_1-a_{11}u_1^*$. Подставляем во второе уравнение: $a_{12}u_1^*-\beta_0(c_1-a_{11}u_1^*)=c_2$. Находим u_1*: $a_{12}u_1^*+\beta_0 a_{11}u_1^*=c_2+c_1\beta_0$. В левой части выносим за скобки $a_{11}u_1$*, а в правой части c_1: $a_{11}u_1^*(k_1+\beta_0)=c_1(k+\beta_0)$. Получаем, что оценка предельной полезности ресурса R_1 равна u_1*$=\frac{c_1}{a_{11}}\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}$. Находим оценку u_3*: $u_3^*=c_1-a_{11}\cdot\frac{c_1}{a_{11}}\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_1}=\mathrm{c}_1\cdot\frac{\beta_0+k_1-\beta_0-k}{\beta_0+k_1}=-\mathrm{c}_1\cdot\frac{k-k_1}{\beta_0+k_1}$. Так как оценка минимальной относительной нормы отрицательная, то $k\geq k_1$.

В частности, при $k=k_1$ решением двойственной задачи будут значения переменных: u_1*$=\frac{c_1}{a_{11}}$, u_2*=u_3*=u_4*=0, а максимальный доход предприятия равен $Z_{\max}=\frac{b_1 c_1}{a_{11}}$.

3. 3. Ресурс R_2 дефицитный, ресурс R_1 избыточный

Перейдём к случаю, когда дефицитный только ресурс R_2. Он расходуется полностью, его остаток равен нулю, а остаток ресурса R_1 больше нуля: y_2*=0, y_1*>0. Для всех ограничений задачи получаем, что y_2*=y_3=0, y_1*>0, y_4*<0. Оптимальный план удовлетворяет системе уравнений и неравенств: $\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & >b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & =b_2 \\ x_1^* & -\beta_0 x_2^* & =0 \\ & x_2^* & >n \end{cases}$. Всё также x_1*=$\beta_0 x_2$*. Подставим выражение для x_1* во второе уравнение и найдём x_2*: $a_{21}\beta_0 x_2^*+a_{22}x_2^*=b_2$. Получаем, что $x_2^*=\frac{b_2}{a_{21}(\beta_0+k_2)}$, так как $a_{22}=k_2 a_{21}$. Значение x_1* равно: $x_1^*=\frac{\beta_0 b_2}{a_{21}(\beta_0+k_2)}$. Оптимальным будет план: X*$=\left(\frac{b_2\beta_0}{a_{21}(\beta_0+k_2)};\frac{b_2}{a_{21}(\beta_0+k_2)}\right)$. Найдём остаток ресурса R_1. Подставляем x_1* и x_2* в y_1*: y_1*$=b_1-\frac{a_{11}b_2\beta_0}{a_{21}(\beta_0+k_2)}-\frac{a_{12}b_2}{a_{21}(\beta_0+k_2)}$. Так как $b_2=\beta b_1$, $a_{21}=\beta_1 a_{11}$, а $a_{12}=k_1 a_{11}$, то y_1*$=b_2\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta_1}\frac{\beta_0+k_1}{\beta_0+k_2}\right)$. Для отношения запасов ресурсов β выполняется условие $\beta<\beta_1\frac{\beta_0+k_2}{\beta_0+k_1}$. Определяем значение y_4*: $y_4^*=n-\frac{b_2}{a_{21}(\beta_0+k_2)}=-\frac{b_2-na_{21}(\beta_0+k_2)}{a_{21}(\beta_0+k_2)}$. Отрицательность y_4* означает, что $b_2-na_{21}(\beta_0+k_2)>0$. Последнее неравенство определяет, что запас ресурса R_2 больше b_{02} (b_2>b_{02}).

Значение целевой функций равно: $Z_{\max}=\frac{b_2 c_1\beta_0}{a_{21}(\beta_0+k_2)}+\frac{b_2 c_2}{a_{21}(\beta_0+k_2)}$. Отсюда следует, что $Z_{\max}=\frac{b_2 c_1(\beta_0+k)}{a_{21}(\beta_0+k_2)}$.

Всё также объёмы выпускаемой продукции не равны нулю. Оба ограничения двойственной задачи являются равенствами. Так как остаток ресурса R_1 не равен нулю, то его предельная полезность равна нулю (u_1*=0). Решение двойственной задачи определяется системой уравнений: $\begin{cases} a_{21}u_2^* & +u_3^* & = c_1 \\ a_{22}u_2^* & -\beta_0 u_3^* & = c_2 \end{cases}$. Решаем систему уравнений, как и в п. 3. 2. Из первого уравнения: $u_3^* = c_1 - a_{21}u_2^*$. Подставляем во второе уравнение: $a_{22}u_2^* - \beta_0(c_1 - a_{21}u_2^*) = c_2$. Находим u_1*: $a_{22}u_2^* + \beta_0 a_{21}u_1^* = c_2 + c_1\beta_0$. Тогда $a_{21}u_2^*(k_2 + \beta_0) = c_1(k + \beta_0)$. Оценка предельной полезности ресурса R_2 равна u_2*=$\frac{c_1}{a_{21}}\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}$. Находим оценку u_3*: $u_3^* = c_1 - a_{21} \cdot \frac{c_1}{a_{21}}\frac{\beta_0+k}{\beta_0+k_2}$=$c_1 \cdot \frac{\beta_0+k_2-\beta_0-k}{\beta_0+k_2}$=$-c_1 \cdot \frac{k-k_2}{\beta_0+k_2}$. Так как оценка минимальной относительной нормы отрицательная, то $k \geq k_2$.

В частности, при k=k_2 решением двойственной задачи будут значения переменных: u_2*=$\frac{c_1}{a_{21}}$, u_1*=u_3*=u_4*=0, а максимальный доход предприятия равен Z_{max}=$\frac{b_2c_1}{a_{21}}$.

3.2. Производство продукции при влиянии только минимальной нормы n выпуска продукции вида A_2

Теперь рассмотрим условия производства, когда при оптимальном плане влияет минимальная норма выпуска продукции A_2. это значит, что четвёртое ограничение в прямой задачи будет равенством (y_4*=0). Объём выпуска продукции A_2 равен n (x_2*=n). Опять рассмотрим три варианта производства продукции.

3.4. Оба ресурса дефицитные

Снова рассматриваем первый вариант: оба ресурса расходуются полностью, их остатки равны нулю: y_1*=y_2*=0. Для всех ограничений задачи получаем, что y_1*=y_2*=y_4*=0, y_3<0. Оптимальный план удовлетворяет системе уравнений и неравенства: $\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & = b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & = b_2 \\ x_1^* & -\beta_0 x_2^* & > 0 \\ & x_2^* & = n \end{cases}$. Подставим x_2*=n в первое и второе уравнения и найдём x_1*: $a_{11}x_1^* + a_{12}n = b_1$ и $a_{21}x_1^* + a_{22}n = b_2$. Из этих уравнений $x_1^* = \frac{b_1 - a_{12}n}{a_{11}}$ и $x_1^* = \frac{b_2 - a_{22}n}{a_{21}}$.

Определяем условия для этого варианта производства: $\frac{b_1 - a_{12}n}{a_{11}} = \frac{b_2 - a_{22}n}{a_{21}}$. Преобразуем уравнение: $\frac{(b_1 - a_{12}n)a_{21}}{a_{11}} = b_2 - a_{22}n \quad \rightarrow \beta_1(b_1 - a_{12}n) = \beta b_1 - a_{22}n \quad \rightarrow a_{12}n(\beta_2 - \beta_1) = b_1(\beta - \beta_1) \rightarrow \beta - \beta_1 = \frac{a_{12}n(\beta_2 - \beta_1)}{b_1} \rightarrow \beta = \beta_1 + \frac{a_{12}n(\beta_2 - \beta_1)}{b_1}$. Итак вариант производства, когда минимальная норма продукции A_2 влияет на показатель эффективности и оба ресурса дефицитные, возможен только при $\beta = \beta_1 + \frac{a_{12}n(\beta_2 - \beta_1)}{b_1}$.

Определим значение y_3*: $y_3^* = -x_1^* + \beta_0 n = -\frac{b_1 - a_{12}n}{a_{11}} + \beta_0 n$. Получаем, что $y_3^* = -\frac{b_1 - a_{11}n(\beta_0 + k_1)}{a_{11}}$. Так как y_3* <0, то $b_1 - na_{11}(\beta_0 + k_1) > 0$. Выражение $na_{11}(\beta_0 + k_1)$ равно b_{01}, поэтому b_1> b_{01}. Аналогично можно сказать и для ресурса R_2: запас ресурса R_2 больше b_{02} (b_2>b_{02}).

Оптимальным будет план производства: $X^*=\left(\frac{b_1-a_{12}n}{a_{11}}\ ; n\right)$. Вычислим максимальный доход предприятия: $Z_{max}=c_1\frac{b_1-a_{12}n}{a_{11}}+c_2n$. Получаем, что $Z_{max}=c_1\left(\frac{b_1}{a_{11}}+n(k-k_1)\right)$.

Перейдём к решению двойственной задачи. Так как третье ограничение прямой задачи при оптимальном плане является неравенством, то $u_3^*=0$. Объёмы продукции не равны нулю. Оба ограничения двойственной задачи являются равенствами: $\begin{cases} a_{11}u_1^* & +a_{21}u_2^* & & =c_1 \\ a_{12}u_1^* & +a_{22}u_2^* & +u_4^* & =c_2 \end{cases}$. Так как $u_1^*\geq0$ и $u_2^*\geq0$, то решением первого уравнения будет: $u_1^*=\frac{c_1t}{a_{11}}$, $u_2^*=\frac{c_1(1-t)}{a_{21}}$. Выразим u_4^* во втором уравнении и подставим значения u_1^* и u_2^*: $u_4^*=c_2-a_{12}u_1^*-a_{22}u_2^* \rightarrow u_4^*=c_1k-a_{12}\frac{c_1t}{a_{11}}-a_{22}\frac{c_1(1-t)}{a_{21}} \rightarrow u_4^*=c_1k-a_{12}\frac{c_1t}{a_{11}}-a_{22}\frac{c_1(1-t)}{a_{21}} \rightarrow u_4^*=c_1k-c_1k_1t-c_1k_2(1-t) \rightarrow u_4^*=c_1\big(k-k_2+t(k_2-k_1)\big) \rightarrow u_4^*=-c_1\big(k_2-k-t(k_2-k_1)\big)$. Так как $u_1^*\geq0$, то $t\geq0$, а так как $u_2^*\geq0$, то $1-t\geq0$. Тогда значение параметра t лежит в пределах от нуля до единицы: $0\leq t\leq 1$. Так как $u_4^*\leq0$, то $k_2-k-t(k_2-k_1)\geq0$. Из последнего неравенства получаем ещё одно условие на t: $t\leq\frac{k_2-k}{k_2-k_1}$. Так как $t\geq0$, то $k_2-k\geq0$ или $k\leq k_2$.

Найдём значение параметра t, когда $\frac{k_2-k}{k_2-k_1}\leq1$. Из неравенства следует: $k_2-k\leq k_2-k_1 \rightarrow k\geq k_1$. Получаем, что при $k\leq k_1$ параметр t удовлетворяет условию $0\leq t\leq1$, а при $k_1<k\leq k_2$ для t: $0\leq t\leq\frac{k_2-k}{k_2-k_1}$. При $k>k_2$ задача решения не имеет.

3.5. Ресурс R_1 дефицитный, ресурс R_2 избыточный

Опять, пусть дефицитным является только ресурс R_1. Схема решения пары двойственных задач такая же, как в п. 2. 2 и 3. 2. Ресурс R_1 расходуется полностью, его остаток равен нулю, а остаток ресурса R_2 больше нуля: $y_1^*=0$, $y_2^*>0$. Для всех ограничений задачи получаем, что $y_1^*=y_4=0$, $y_2^*>0$, $y_3^*<0$.

Оптимальный план удовлетворяет системе уравнений и неравенств: $\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & =b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & >b_2 \\ x_1^* & -\beta_0x_2^* & >0 \\ & x_2^* & =n \end{cases}$.

Подставим выражение для $x_2^*=n$ в первое уравнение и найдём x_1^*: $a_{11}x_1^*+a_{12}n=b_1$. Получаем, что $x_1^*=\frac{b_1-a_{12}n}{a_{11}}$. Оптимальным будет план: $X^*=\left(\frac{b_1-a_{12}n}{a_{11}}; n\right)$. Найдём остаток ресурса R_2. Подставляем x_1^* и x_2^* в y_2^*: $y_2^*=b_2-a_{21}\frac{b_1-a_{12}n}{a_{11}}-a_{22}n$. Так как $b_2=\beta b_1$, $a_{21}=\beta_1a_{11}$, а $a_{22}=k_2a_{21}$, то $y_2^*=\beta b_1-\beta_1b_1-a_{21}\frac{a_{12}n}{a_{11}}-a_{22}n$. Преобразуем правую часть: $y_2^*=\beta b_1-\beta_1b_1-a_{12}n(\beta_2-\beta_1) \rightarrow$ $y_2^*=b_1(\beta-\beta_1)-a_{12}n(\beta_2-\beta_1)$. Так как $y_2^*>0$, то $b_1(\beta-\beta_1)>a_{12}n(\beta_2-\beta_1) \rightarrow \beta-\beta_1>\frac{a_{12}n(\beta_2-\beta_1)}{b_1}$. В итоге, для коэффициента β выполняется условие: $\beta>\beta_1+\frac{a_{12}n(\beta_2-\beta_1)}{b_1}$.

Как и в п. 3. 1 отрицательность y_3* означает, что $b_1 > b_{01}$ и $b_2 > b_{02}$. Значение целевой функции равно: $Z_{max}=c_1 \cdot \frac{b_1 - a_{12}n}{a_{11}} + c_2 n = c_1 \cdot \frac{b_1}{a_{11}} - k_1 c_1 n + k c_1 n = c_1\left(\frac{b_1}{a_{11}} + n(k-k_1)\right)$. Получаем, что $Z_{max}=c_1\left(\frac{b_1}{a_{11}} + n(k-k_1)\right)$.

Всё также оба ограничения двойственной задачи являются равенствами. Как и в п. 3. 2 остаток ресурса R_2 не равен нулю, его предельная полезность равна нулю (u_2*=0). Решение двойственной задачи определяется системой уравнений: $\begin{cases} a_{11}u_1^* & & = c_1 \\ a_{12}u_1^* & +u_4^* & = c_2 \end{cases}$. Из первого уравнении находим u_1* и подставляем во второе уравнение: $u_1^* = \frac{c_1}{a_{11}}$. Подставляем во второе уравнение: $a_{12}\frac{c_1}{a_{11}} + u_4^* = c_2$. Находим u_4*: $u_4^* = c_1 k - c_1 k_1 \rightarrow$ $u_4^* = c_1(k-k_1) \rightarrow$ $u_4^* = -c_1(k_1 - k)$. Оценка u_4* отрицательная, потому $k_1 - k \geq 0$. Отсюда получаем условие на коэффициент k: $k \leq k_1$.

В частности, при $k=k_1$ решением двойственной задачи будут значения переменных: u_1*=$\frac{c_1}{a_{11}}$, u_2*=u_3*=u_4*=0, а максимальный доход предприятия равен $Z_{max}=\frac{b_1 c_1}{a_{11}}$.

3. 6. Ресурс R_2 дефицитный, ресурс R_1 избыточный

Теперь ресурс R_2 избыточный. он расходуется полностью, его остаток равен нулю, а остаток ресурса R_1 больше нуля: y_2*=0, y_1*>0. Для всех ограничений задачи получаем, что y_2*=y_4=0, y_1*>0, y_3*<0.

Системе уравнений и неравенств имеет вид: $\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & > b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & = b_2 \\ x_1^* & -\beta_0 x_2^* & > 0 \\ & x_2^* & = n \end{cases}$. Подставим выражение для x_2*=n во второе уравнение: $a_{21}x_1^* + a_{22}n = b_2$. Получаем, что $x_1^* = \frac{b_2 - a_{22}n}{a_{21}}$. Оптимальным будет план: X*=$\left(\frac{b_2 - a_{22}n}{a_{21}}; n\right)$. Остаток ресурса R_1: y_1*=$b_1 - a_{11}\frac{b_2 - a_{22}n}{a_{21}} - a_{12}n$. Получаем, что y_1*=$b_1 - \frac{b_2}{\beta_1} + a_{11}\frac{a_{22}n}{a_{21}} - a_{12}n$. Преобразуем правую часть: y_1*=$b_1 - \frac{\beta}{\beta_1}b_1 + \frac{a_{22}n}{\beta_1} - a_{12}n \rightarrow$ y_1*=$b_1 \cdot \frac{\beta_1 - \beta}{\beta_1} + a_{22}n \cdot \left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right) \rightarrow$ y_1*=$\frac{b_1}{\beta_1}\left(\beta_1 - \beta + a_{22}n \cdot \frac{\beta_2 - \beta_1}{b_1 \beta_2}\right)$. Так как y_1*>0, то $\beta - \beta_1 < \frac{a_{22}n}{b_1}(\beta_2 - \beta_1)$. Получаем, что $\beta > \beta_1 + \frac{a_{12}n(\beta_2 - \beta_1)}{b_1}$.

Максимальный доход предприятия равен $Z_{max}=\frac{c_1}{a_{21}} \cdot b_2 - c_1 n(k_2 - k)$.

Решаем двойственную задачу. Оба ограничения являются равенствами. Как и в п. 3. 3 остаток ресурса R_1 не равен нулю (u_1*=0). Составляем систему уравнений: $\begin{cases} a_{21}u_2^* & & = c_1 \\ a_{22}u_2^* & +u_4^* & = c_2 \end{cases}$. Из первого уравнения u_2* равно: $u_2^* = \frac{c_1}{a_{21}}$. Подставляем во второе уравнение: $a_{22}\frac{c_1}{a_{21}} + u_4^* = c_2$. Находим u_4*: $u_4^* = c_1(k-k_2) \rightarrow$ $u_4^* = -c_1(k_2 - k)$. Оценка u_4* отрицательная, потому $k_2 - k \geq 0$. Отсюда получаем условие на коэффициент k: $k \leq k_2$.

В частности, при $k=k_2$ решением двойственной задачи будут значения переменных: $u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}$, $u_1^*=u_3^*=u_4^*=0$, а максимальный доход предприятия равен $Z_{\max}=\frac{b_2c_1}{a_{21}}$.

4. Производство продукции без влияния факторов

Перейдём к производству, когда на оптимальный план влияет только расход ресурсов. Тогда влияния минимальной относительной нормы выпуска продукции A_1 по отношению к A_2 нет, а также влияния минимальной нормы производства продукции A_2. В этом случае значения дополнительных переменных прямой задачи третьего и четвёртого ограничений будут строго меньше нуля: $y_3^*<0$, $y_4^*<0$. Оптимальное решение будет определяться системой уравнений: $\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & =b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & =b_2 \end{cases}$, когда оба ресурса дефицитные. Решением этой системы уравнений будет $X^*=\left(\frac{k_2\frac{b_1}{a_{11}}-k_1\frac{b_2}{a_{21}}}{k_2-k_1};\frac{\frac{b_2}{a_{21}}-\frac{b_1}{a_{11}}}{k_2-k_1}\right)$. Учитывая, что объёмы продукции должны быть положительными, получим условия на коэффициент задачи: $\frac{k_2\frac{b_1}{a_{11}}-k_1\frac{b_2}{a_{21}}}{k_2-k_1}\geq 0$ и $\frac{\frac{b_2}{a_{21}}-\frac{b_1}{a_{11}}}{k_2-k_1}\geq 0$. Решаем первое неравенство. Так как $k_2\geq k_1$, то $k_2\frac{b_1}{a_{11}}-k_1\frac{b_2}{a_{21}}\geq 0\rightarrow$ $\frac{a_{22}}{a_{21}}\cdot\frac{b_1}{a_{11}}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\cdot\frac{\beta b_1}{a_{21}}\geq 0$ $\rightarrow\frac{a_{12}}{a_{21}}\cdot\frac{b_1}{a_{11}}\cdot(\beta_2-\beta)\geq 0\rightarrow\frac{a_{12}}{a_{21}}\cdot\frac{b_1}{a_{11}}\cdot(\beta_2-\beta)\geq 0\rightarrow\frac{a_{12}}{a_{21}}\cdot\beta_2-\beta\geq 0\rightarrow\beta\leq\beta_2$. Решаем второе неравенство: $\frac{b_2}{a_{21}}-\frac{b_1}{a_{11}}\geq 0\rightarrow\frac{\beta b_1}{a_{21}}-\frac{b_1}{a_{11}}\geq 0\rightarrow\frac{b_1}{a_{21}}\cdot(\beta-\beta_1)\geq 0$ $\rightarrow\beta-\beta_1\geq 0\rightarrow\beta\geq\beta_1$. Таким образом, для отношения запасов ресурсов β должно выполняться условие $\beta_1\leq\beta\leq\beta_2$.

Учтём строгость третьего и четвёртого условия: $x_1^*-\beta_0x_2^*>0$ и $x_2^*>n$. Из этих неравенств следует, что $x_2^*>n>0$, $x_1^*>\beta_0x_2^*>\beta_0n>0$. Так как $x_2^*>0$, $x_1^*>0$, то $\beta_1<\beta<\beta_2$. Кроме этого отрицательность y_3^* и y_4^* означает, что $b_1>b_{01}$ и $b_2>b_{02}$.

Вычислим максимальный доход предприятия, он равен:

$Z_{\max}=c_1\cdot\left(\frac{b_1}{a_{11}}(k_2-k)+\frac{b_2}{a_{21}}(k-k_1)\right)$.

Решаем двойственную задачу. Так как третье и четвёртое ограничения прямой задачи при оптимальном плане являются неравенствами, то $u_3^*=0$ и $u_4^*=0$. Объёмы продукции не равны нулю. Оба ограничения двойственной задачи являются равенствами: $\begin{cases} a_{11}u_1^* & +a_{21}u_2^* & =c_1 \\ a_{12}u_1^* & +a_{22}u_2^* & =c_2 \end{cases}$. Найдём u_1^*, умножив первое уравнение на a_{22}, второе уравнение на a_{21}, вычитая из второго уравнения первое: $a_{21}a_{12}u_1^*-a_{22}a_{11}u_1^*=a_{21}c_2-a_{22}c_1\rightarrow(a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22})u_1^*=a_{21}c_1k-a_{22}c_1\rightarrow a_{21}a_{11}(k_1-k_2)u_1^*=c_1a_{21}(k-k_2)\rightarrow u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{k-k_2}{k_1-k_2}=\frac{c_1}{a_{11}}\cdot\frac{k_2-k}{k_2-k_1}$. Теперь найдём u_2^*, умножив первое уравнение на a_{12}, второе уравнение на a_{11}, также вычитая из второго уравнения первое: $a_{11}a_{22}u_2^*-a_{21}a_{12}u_2^*=a_{11}c_2-a_{12}c_1\rightarrow(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})u_2^*=a_{11}c_1k-a_{12}c_1\rightarrow a_{21}a_{11}(k_2-k_1)u_2^*=c_1a_{11}(k-k_1)\rightarrow u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}\cdot\frac{k-k_1}{k_2-k_1}$. Так как $u_1^*\geq 0$ и $u_2^*\geq 0$, то значение k удовлетворяет условию k_1 ($k_1\leq k\leq k_2$).

Таким образом, решение пары двойственных задач существует при $k_1 \leq k \leq k_2$, решение двойственной задачи: $u_1{*}=\frac{c_1}{a_{11}} \cdot \frac{k_2-k}{k_2-k_1}$, $u_2{*}=\frac{c_1}{a_{21}} \cdot \frac{k-k_1}{k_2-k_1}$, $u_3{*}=u_4{*}=0$.

5. Условия неразрешимости пары двойственных задач

Рассмотрим вопрос условий производства, при котором не возможен выпуск продукции, чтобы выполнялись все ограничения использования ресурсов и влияния факторов. Посмотрим, каким условиям должны удовлетворять параметры задачи b_1, b_2, β_0 и n в этом случае. Из постановки задачи об использовании ресурсов предполагается, что параметры задачи удовлетворяют условиям: $b_1>0$, $b_2>0$, $\beta_0>0$, $n>0$.

Задача описывается системой условий: $\begin{cases} a_{11}x_1^* & +a_{12}x_2^* & \leq b_1 \\ a_{21}x_1^* & +a_{22}x_2^* & \leq b_2 \\ x_1^* & -\beta_0 x_2^* & \geq 0 \\ & x_2^* & \geq n \end{cases}$.

Пусть выполняется ограничение на минимальную норму производства продукции A_2: $x_2 \geq n$. Тогда из условия влияния минимальной относительной нормы производства продукции A_1 по отношению к A_2 получаем: $x_1-\beta_0 x_2 \geq 0 \rightarrow x_1 \geq \beta_0 x_2 \rightarrow x_1 \geq \beta_0 x_2 \geq \beta_0 n$. Переменные задачи удовлетворяют условиям: $x_1 \geq \beta_0 n$ и $x_2 \geq n$. Тогда первое и второе ограничения по использованию ресурсов определяют следующие условия: $a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1$, $a_{21}x_1+a_{22}x_2 \leq b_2 \rightarrow a_{11}\beta_0 n+a_{12}n \leq \leq a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1$, $a_{21}\beta_0 n+a_{22}n \leq a_{21}x_1+a_{22}x_2 \leq b_2 \rightarrow a_{11}n(\beta_0+k_1) \leq b_1$, $a_{21}n(\beta_0+k_2) \leq b_2$.

Таким образом, для производства продукции в условиях влияния факторов производства должны выполняться необходимые ограничения на параметры задачи: $a_{11}n(\beta_0+k_1) \leq b_1$ и $a_{21}n(\beta_0+k_2) \leq b_2$.

Достаточность определяется тем фактом, что задача о использовании ресурсов исходной задачи без влияния факторов всегда разрешима, а максимальное значение целевой функции задачи с дополнительными ограничениями не превосходит максимального значения целевой функции без дополнительных ограничений. Для достаточности выполнения условий на параметры решаемой задачи нужно показать лишь, что есть план выпуска продукции, при котором производство удовлетворяет всем ограничениям исходной задачи. А это план $X(\beta_0 n, n)$.

Отметим, что при фиксированных значениях запасов b_1и b_2 соответственно ресурсов R_1 и R_2. Условие разрешимости задачи будут определяться неравенствами для параметров β_0 и n: $n(\beta_0+k_1) \leq b_1/a_{11}$ и $n(\beta_0+k_2) \leq b_2/a_{21}$.

Итак, при заданных значениях параметров β_0 и n запасы ресурсов должны удовлетворяют условиям: $b_1 \geq a_{11}n(\beta_0+k_1)$ и $b_2 \geq a_{21}n(\beta_0+k_2)$. А при заданных значения запасов ресурсов b_1и b_2 минимальная относительная норма производства продукции A_1 по отношению к A_2 β_0 и минимальная норма производства продукции A_2 n удовлетворяют условиям: $n(\beta_0+k_1) \leq b_1/a_{11}$ и $n(\beta_0+k_2) \leq b_2/a_{21}$.

5. Выводы

Задачу об использовании ресурсов с учётом влияния минимальной относительной нормы выпуска продукции одного вида к другому и минимальной нормы производства второго вида можно решать по влиянию факторов: влияют оба фактора, влияет относительная норма, абсолютная нет, влияет абсолютная норма, относительная нет, оба не влияют на оптимальное производство.

Каждый вариант влияния факторов предусматривает различные статусы ресурсов: оба дефицитные, один дефицитный, один нет. В задаче с минимальными нормами оба ресурса избыточными быть не могут.

Задача не имеет решение при условии, когда не выполняется одно из ограничений: $a_{11}n(\beta_0+k_1)\leq b_1$ или $a_{21}n(\beta_0+k_2)\leq b_2$.

Решение задачи в особых случаях решения двойственной задачи могут иметь множество решений в прямой задаче, которые в данной работе не рассматривались. эти решения приводят к различным условиям влияния факторов. Данные исследования могут быть дальнейшим направлением изучения влияния факторов на производство продукции.

Библиографический список

1. О. В. Мамонов, А. В. Конюхова. Влияния технологических факторов производства в случае использования двух ресурсов / Теория и практика современной аграрной науки: сб. национальной (всероссийской) научной конференции (г. Новосибирск, 20 февраля 2018 г.) / Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск: ИЦ «Золотой колос», 2017. – 903 с.

2. О. В. Мамонов. Анализ использования двух ресурсов предприятия с двумя видами продукции с помощью графического способа решения задачи линейного программирования: Агропродовольственная экономика: научно-практический электронный журнал. Нижний Новгород: НОО «Профессиональная наука» - No10 - 2016. – 7-42 с.

3. О. В. Мамонов, Р. В. Луцик. Пример расчёта оценки влияния спроса на доход предприятия с двумя ресурсами: сб. трудов научно-практической конференции преподавателей, студентов, магистрантов и аспирантов Новосибирского государственного аграрного университета (г. Новосибирск, 16-17 октября 2017 г.), выпуск 2. / Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск: ИЦ «Золотой колос», 2017. – 365 с.

4. О. В. Мамонов, С. В. Егорова, А. А. Пугачёва. Влияние спроса продукции двух видов и запаса ресурса на эффективность производства/ Теория и практика современной аграрной науки: сб. национальной (всероссийской) научной конференции (г. Новосибирск, 20 февраля 2018 г.) / Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск: ИЦ «Золотой колос», 2017. – 903 с.

5. О. В. Мамонов, А. В. Конюхова. Определение зависимости предельной полезности ресурса и оценок влияния факторов производства от минимальной нормы производства второго вида продукции: сб. трудов научно-практической конференции преподавателей, студентов, магистрантов и аспирантов Новосибирского государственного аграрного университета (г. Новосибирск, 16-17 октября 2017 г.), выпуск 2. / Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск: ИЦ «Золотой колос», 2017. – 365 с.

6. Р.Ш. Хуснутдинов. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 224 с., 500 экз.

7. Экономико-математические методы в примерах и задачах: Учеб. пос. / А.Н. Гармаш, И.В.Орлова, Н.В.Концевая и др.; Под ред. А.Н.Гармаша - М.: Вуз. уч.: НИЦ ИНФРА-М, 2014 - 416с., 700 экз.

8. Экономическая теория. Микроэкономика: Учебник/ Под ред. Г. П. Журавлёвой - ИТК «Дашков и К, 2014. - 914 с.

9. В. В. Федосеев. Экономико-математические модели и прогнозирование рынка труда: Учеб. пособие - 2-е изд., доп. и испр. - М.: Вузовский учебник, 2010. - 144 с., 500 экз.