Мамонов О.В. Анализ влияния спроса продукции и запаса ресурса на показатель эффективности производства, выпускающего два вида продукции/ АГРОПРОДОВОЛЬСТВЕННАЯ ЭКОНОМИКА. - №2, 2018 г. Доступ: http://apej.ru/article/03-02-18

УДК 330.4

Мамонов О. В. Анализ влияния спроса продукции и запаса ресурса на показатель эффективности производства, выпускающего два вида продукции

Мамонов Олег Владимирович
Новосибирский ГАУ
Mamonov Oleg Vladimirovich
Novosibirsk GAU

Аннотация. *Рассматривается анализ влияния спроса на доход предприятия и эффективность использования ресурса. Зависимость дохода от спроса исследуется на примере предприятия, впускающего два вида продукции, использующего один ресурс, с учётом наличия спроса по каждому виду продукции. Строится математическая модель задачи в виде пары двойственных задач линейного программирования, которая рассматривается как модификация задачи об использовании ресурсов. Для ресурса определяется статус, определяемый дефицитностью ресурса и его избыточностью. Для факторов предлагается определить статус в зависимости от их влияния на показатель эффективности производства: влияет на показатель эффективности или нет. Рассматриваются статусы ресурса и факторов производства в различных вариантах планирования производства. Последовательно решаются задачи с разными статусами ресурса и влияния спроса по видам продукции. Сначала рассматривается анализ решения пары двойственных задач для дефицитного ресурса с различными статусами спроса по видам продукции: спрос на оба вида продукции не влияет на показатель эффективности, один влияет, другой нет, влияют оба. Потом рассматривается анализ решения задач для избыточного ресурса. Для каждого варианта условий находится решение пары двойственных задач и подводятся итоги решения. В заключении делаются выводы по полученным решениям.*

Ключевые слова. *Задача об использовании ресурсов, задача линейного программирования, дефицитный ресурс, предельная оценка использования ресурса, влияние размера спроса на доход предприятия, оценка влияния спроса на доход предприятия.*

Abstract. *The analysis of the influence of demand on enterprise income and the efficiency of resource use is considered. Dependence of income on demand is investigated using the example of an enterprise that allows two types of products that use a single resource, taking into account the availability of demand for each type of product. A mathematical model of the problem is constructed in the form of a pair of dual linear programming problems, which is considered as a modification of the problem of resource utilization. For a resource, the status determined by the scarcity of the resource and its redundancy is determined. For factors it is suggested to determine the status depending on their influence on the index of production efficiency: it affects the efficiency index or not. The status of the resource and factors of production in various production planning options are considered. Successively solved tasks with different statuses of the resource and the impact of demand on the types of products. First, we consider the analysis of the solution of a pair of dual problems for a scarce resource with different demand statuses by product: the demand for both products does not affect the efficiency index, one affects, the other does not, both influence. Then we analyze the analysis of the solution of the problems for the excess resource. For each variant of the conditions there is a solution of a pair of dual problems and the results of the solution are summed up. In conclusion, conclusions are drawn on the solutions obtained.*

Keywords. *The task of using resources, the task of linear programming, a scarce resource, the marginal valuation of resource use, the impact of the size of demand on enterprise income, the impact of demand on enterprise income.*

Введение

Задача о оптимальном использовании ресурсов с наложением дополнительных условий влияния факторов производства имеет различные модификации. Так в работе [1] рассматривались вопросы влияния технологических условий на показатели производства продукции, в работе [2] исследовалась задача, учитывающая влияние относительного и абсолютного спроса на выпускаемую продукцию. Влияние условий представлялось в виде линейных ограничений. Влияние абсолютного спроса на производство продукции также можно выразить в виде линейных неравенств и уравнений. Поэтому рассмотрим модификацию задачи об оптимальном использовании ресурсов, представляющейся в виде задачи линейного программирования, с учётом влияния факторов на эффективность производства, где факторами будут спрос по каждому виду продукции.

Пусть предприятие, используя ресурс вида R, производит продукцию k видов: A_1, A_2, … , A_k. Запас ресурса на предприятии равняется b единиц, его расход на единицу продукции вида A_1 равняется a_1 единиц ресурса, на единицу продукции A_2 – a_2 единиц ресурса, … , на единицу продукции A_k – a_k единиц ресурса R.

Спрос на продукцию вида A_1 составляет n_1 единиц, на продукцию вида A_2 – n_2, …, на продукцию вида A_k – n_k. Нужно определить план выпуска продукции, чтобы получить максимальный доход, если доход от реализации продукции вида A_1 составляет c_1 руб., продукции вида A_2 – c_2 руб., …, продукции вида A_k – c_k руб.

Пример исследования такой задачи проведём для двух видов продукции. Посмотрим обобщённую экономико-математическая модель этой задачи, как модель задачи с тремя параметрами b, n_1 и n_2 (1).

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \le b \\ x_1 \le n_1 \\ x_2 \le n_2 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to max. \end{cases} \qquad (1)$$

Двойственная задача к задаче (1) будет задача (2).

$$\begin{cases} a_1u_1 + u_2 \ge c_1 \\ a_2u_1 + u_3 \ge c_2 \\ \end{cases} \qquad (2)$$

$$u_1 \ge 0;\ u_2 \ge 0;\ u_3 \ge 0$$
$$W = bu_1 + n_1u_2 + n_2u_3 \to min.$$

Рассмотрим решения пары двойственных задач (1) – (2) в зависимости от условий, определяющих статус ограничений на использование ресурса и спроса на впускаемую продукцию, предполагая, что предприятие не выпускает продукцию больше спроса на неё.

Систему условий будем рассматривать в следующем порядке:

1. Ресурс является дефицитным, вляние спроса обоих видов продукции нет.

2. Ресурс является дефицитным, спрос на первый вид продукции влияет на показатель эффективности производства, а вляния спроса на второй вид продукции нет.

3. Ресурс является дефицитным, спрос на второй вид продукции влияет на производство, а вляния спроса на первый вид продукции нет.

4. Есть влияние спроса обоих видов продукции на показатель ффективности производства, ресурс является дефицитным.

5. Есть вляние спроса обоих видов продукции на показатель ффективности производства, ресурс является избыточным.

1. Решение пары двойственных задач, когда ресурс является дефицитным, а спрос по каждому виду проукции не влияет на производство

Решение задачи начнём с первой системы условий. Предполагаем, что ресурс дефицитный ($a_1x^*_1+ a_2x^*_2 =b$), а спрос по каждому виду продукции не влияет на показатель эффективности производства ($x^*_1 <n_1$; $x^*_2 <n_2$).

Возможны три вида оптимальных планов прямой задачи:

1. $x^*_1>0$; $x^*_2=0$; 2. $x^*_1=0$; $x^*_2>0$; 3. $x^*_1>0$; $x^*_2>0$. Первый вид предполагает, что выпускается только продукция первого вида, второй, что выпускается продукция только второго вида, третий – производятся оба вида продукции. Каждое из условий рассмотрим отдельно, предполагая, что для всех них справедливы уравнение $a_1x^*_1+ a_2x^*_2=b$ и неравенства $x^*_1 <n_1$ и $x^*_2<n_2$.

1.1. Решение задачи, когда выпускается только первый вид продукции

Пусть $x^*_1>0$; $x^*_2=0$. Тогда $x^*_1=\frac{b}{a_1}$. Определяем значения дополнительных переменных прямой задачи: y^*_1, y^*_2, y^*_3. Так как первое ограничение является равенством, то $y^*_1=0$, значение второй переменной равно $y^*_2=n_1-\frac{b}{a_1}>0$, а третьей – $y^*_3=n_2-0$ или $y^*_3=n_2$.

Вычислим максимальное значение целевой функции: $Z_{max}= c_1\cdot\frac{b}{a_1}$. Обозначим $\frac{c_1}{a_1}$ через γ_1, тогда $Z_{max}= \gamma_1\cdot b$. Коэффициент γ_1 является оценкой ресурса, используемого в производстве первого вида продукции.

В итоге, решение прямой задачи: $X^*=\left(\frac{b}{a_1};0\right)$, $Y^*=\left(0;n_1-\frac{b}{a_1};n_2\right)$, $Z_{max}=c_1\cdot\frac{b}{a_1}$.

Перейдём к решению двойственной задачи, используя следствия из второй теоремы двойственности. Так как $x^*_1>0$, то $a_1u^*_1+ u^*_2= c_1$. Так как $y^*_2>0$ и $y^*_3>0$, то $u^*_2>0$ и $u^*_3> 0$. Из уравнения находим u^*_1: $u^*_1=\frac{c_1}{a_1}=\gamma_1$. Так как $a_2u^*_1+ u^*_3\geq c_2$, то $\frac{a_2c_1}{a_1}-c_2\geq 0$. Обозначим $\frac{a_2}{a_1}$ через k_0, а $\frac{c_2}{c_1}$ через k. Коэффициент k_0 равняется отношению количества ресурса, который используется в единице второго вида продукции, к количеству ресурса, который расходуется в производстве единицы первого вида продукции. Коэффициент k равен отношению показателей эффективности производства второго и первого вида продукции.

Тогда условие $\frac{a_2c_1}{a_1}-c_2\geq 0$ равносильно неравенству $k_0c_1-kc_1\geq 0$ или

$(k_0-k)\cdot c_1\geq 0$. Отсюда следует, что $k_0-k \geq 0$. Таким образом, имеет смысл отдельно рассмотреть случаи, когда $k<k_0$ и $k=k_0$ (в случае, когда $k>k_0$ двойственная задача решения не имеет).

Итак, пусть $k<k_0$. Тогда $v^*_2=(k_0-k)c_1 >0$. Решением двойственной задачи будут векторы $U^*=(\gamma_1;0;0)$, $V^*=(0;(k_0-k)c_1)$. Значение целевой функции двойственной задачи будет равно: $W_{min}= \gamma_1\cdot b$.

Теперь, пусть $k=k_0$, тогда $v^*_2=0$. Обозначим $\frac{c_2}{a_2}$ через γ_2. Соответственно коэффициент γ_2 будет оценкой ресурса, используемого в производстве второго вида продукции. При $k=k_0$ значения оценок ресурса в производстве обоих видов продукции равны ($\gamma_1=\gamma_2$). Имеет смысл их обозначать через один коэффициент – коэффициент γ_0. Тогда решение двойственной задачи можно записать так: $U^*=(\gamma_0; 0; 0)$, $V^*=(0; 0)$, $W_{\min}= \gamma_0 \cdot b$.

В случае, когда при оптимальном плане выпускается только продукция первого вида ($x^*_1=\frac{b}{a_1}$) и ресурса не хватает на удовлетворение спроса продукции, ресурс дефицитный, его предельная полезность равна оценке ресурса в производстве первого вида продукции (γ_1), показатель эффективности равен $Z_{\max}=\gamma_1 \cdot b$ и отношение показателей эффективности второго вида продукции к первому не превосходит отношение расхода ресурса во втором виде продукции к первому виду ($k \le k_0$).

1.2. Решение задачи, когда выпускается только второй вид продукции

Рассмотрим случай, когда при оптимальном плане выпускается только второй вид продукции ($x^*_1=0$; $x^*_2>0$). Тогда $x^*_2=\frac{b}{a_2}$. По предположению дефицитности ресурса $y^*_1=0$. Из второго ограничения получаем, что

$y^*_2= n_1>0$, для третьего ограничения получаем, что $y^*_3= n_2-\frac{b}{a_2}>0$. Вычисляем $Z_{\max}$: $Z_{\max}= c_2\cdot \frac{b}{a_2}$ или $Z_{\max}= \gamma_2 \cdot b$. Решением прямой задачи $X^*=\left(0; \frac{b}{a_2}\right)$, $Y^*=\left(0; n_1; n_2 - \frac{b}{a_2}\right)$, $Z_{\max}=c_2\cdot\frac{b}{a_2}$.

Перейдём к решению двойственной задачи. Так как $x^*_2>0$, то

$a_2 u^*_1+ u^*_3= c_2$. Так как $y^*_2>0$ и $y^*_3>0$, то $u^*_2=0$ и $u^*_3= 0$. Из уравнения находим u^*_1: $u^*_1=\frac{c_2}{a_2}=\gamma_2$. Так как $a_1 u^*_1+ u^*_2\ge c_1$, то $\frac{a_1 c_2}{a_2} - c_1 \ge 0$. Преобразуем неравенство: то $\frac{k c_1}{k_0} - c_1 \ge 0$. Отсюда получаем, что $\frac{k c_1 - k_0 c_1}{k_0} \ge 0$ или $\frac{(k-k_0) c_1}{k_0} \ge 0$. Это условие равносильно тому, что $k-k_0 \ge 0$. Отдельно рассмотрим случаи, когда $k>k_0$ и $k=k_0$. В случае, когда $k<k_0$ двойственная задача решения не имеет.

Пусть $k > k_0$, то $v^*_1=\frac{(k-k_0)c_1}{k_0} >0$. Целевая функция двойственной задачи равна $W_{\min}= \gamma_2 \cdot b$. Решение двойственной задачи: $U^*=(\gamma_2; 0; 0)$, $W_{\min}= \gamma_2 \cdot b$, $V^*=\left(\frac{(k-k_0)c_1}{k_0}; 0\right)$.

Пусть $k=k_0$, тогда $v^*_1=0$. Выполняется условие $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_0$. Решением двойственной задачи будет: $U^*=(\gamma_0; 0; 0)$, $V^*=(0; 0)$, $W_{\min}= \gamma_0 \cdot b$, как и в случае $x^*_1>0$; $x^*_2=0$.

Если при оптимальном плане выпускается только продукция второго вида ($x^*_2=\frac{b}{a_2}$), то, также как и для первого вида продукции, ресурса не хватает на удовлетворение спроса продукции второго вида, ресурс дефицитный, его предельная полезность равна оценке (γ_2), показатель эффективности равен $Z_{\max}=\gamma_2 \cdot b$ и $k \le k_0$.

Можно сказать для обоих видов продукции, что если производится только один из них, то предельная эффективность ресурса равна оценке ресурса для выпускаемого вида продукции, а показатель эффективности производства равен произведению этой оценки на запас ресурса.

1.3. Решение задачи, когда выпускаются оба вида продукции

Пусть при оптимальном плане выпускаются оба вида продукции ($x^*_1>0$; $x^*_2>0$). Тогда решение прямой задачи возможно только при значении коэффициента k равном k_0. В этом случае оптимальное решение прямой задачи не единственно, его можно записать в виде: $x^*_1=\frac{b}{a_1}(1-t)$; $x^*_2=\frac{b}{a_2}t$, где $0<t<1$, значение y^*_1 равно нулю, значение переменной y^*_2 равно

$n_1-\frac{b(1-t)}{a_1}>0$, а значение $y^*_3=n_2-\frac{b}{a_2}t>0$. Вычислим Z_{max}: $Z_{max}=c_1\cdot\frac{b(1-t)}{a_1}+$ $+c_2\cdot\frac{b}{a_2}t=c_1\cdot\frac{b}{a_1}-c_1\cdot\frac{t}{a_1}+c_2\cdot\frac{b}{a_2}t=\frac{bc_1}{a_1}=\gamma_0\cdot b$. Тогда $Z_{max}=\gamma_0\cdot b$.

Итак, решением прямой задачи будет: $X^*=\left(\frac{b(1-t)}{a_1};\frac{b}{a_2}t\right)$, $Z_{max}=\gamma_0\cdot b$,

$Y^*=\left(0;n_1-\frac{b(1-t)}{a_1};n_2-\frac{b}{a_2}t\right)$.

Перейдём к решению двойственной задачи. Так как $x^*_1>0$ и $x^*_2>0$, то $a_1u^*_1+u^*_2=c_1$ и $a_2u^*_1+u^*_3=c_2$. Так как $y^*_2>0$ и $y^*_3>0$, то $u^*_2=0$ и $u^*_3=0$. Из уравнений находим u^*_1: $u^*_1=\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}=\gamma_0$. Таким образом, двойственная задача имеет решение $U^*=(\gamma_0;0;0)$, $V^*=(0;0)$, $W_{min}=\gamma_0\cdot b$.

В условиях, когда при оптимальном плане ресурс является дефицитным, нет влияния спроса обоих видов продукции и выпускаются оба вида продукции, то равны оценки ресурса в производстве продукции каждого вида. Предельная полезность ресурса равна γ_0, максимальное значение показателя эффективности производства равно произведению γ_0 на запас ресурса. Отметим также, что оптимальный план не единственный и равен $X^*=\left(\frac{b(1-t)}{a_1};\frac{b}{a_2}t\right)$, где $0<t<1$.

В итоге получаем, что, когда ресурс дефицитный ($a_1x^*_1+a_2x^*_2=b$) и спрос по каждому виду продукции не влияет на показатель эффективности производства ($x^*_1<n_1$; $x^*_2<n_2$), решение прямой задачи $X^*=\left(\frac{b(1-t)}{a_1};\frac{b}{a_2}t\right)$, $Y^*=\left(0;n_1-\frac{b(1-t)}{a_1};n_2-\frac{b}{a_2}t\right)$, где $0\le t\le 1$. В двойственной задаче $V^*=(0;0)$. А предельная полезность ресурса и максимальное значение целевой функции зависит от отношения коэффициентов k и k_0.

При $k<k_0$ $U^*=(\gamma_1;0;0)$, $W_{min}=\gamma_1\cdot b$. При $k=k_0$ $U^*=(\gamma_0;0;0)$, $W_{min}=\gamma_0\cdot b$. При $k>k_0$ $U^*=(\gamma_2;0;0)$, $W_{min}=\gamma_2\cdot b$.

2. Решение пары двойственных задач, когда ресурс является дефицитным, спрос по одному виду проукции влияет на производство, а по второму виду – нет

2.1. Решение задачи в случае, когда спрос по первому виду продукции влияет на производство продуцкции, а по второму виду – не влияет

Теперь пусть ресурс будет дефицитный ($a_1x^*_1+ a_2x^*_2 =b$), а спрос на первый вид продукции влияет на показатель эффективности производства ($x^*_1 =n_1$), а на второй вид не влияет ($x^*_2<n_2$).

В случаях, когда $x^*_1>0$ и $x^*_2>0$, а также $x^*_1=0$ и $x^*_2>0$, одно из сформулированных условий не выполняется. Потому рассмотрим только случай, когда $x^*_1>0$; $x^*_2=0$.

Итак, пусть $x^*_1>0$; $x^*_2=0$. Тогда $x^*_1=\frac{b}{a_1}=n_1$. Значения переменных y^*_1, y^*_2, y^*_3 будут равны: $y^*_1=0$, $y^*_2=0$, $y^*_3= n_2>0$.

Вычислим максимальное значение целевой функции: $Z_{\max}= c_1\cdot n_1$. Решение прямой задачи: $X^*=(n_1;0)$, $Y^*=(0;0;n_2)$, $Z_{\max}=c_1\cdot n_1$.

Решаем двойственную задачу. Так как $x^*_1>0$, то $a_1u^*_1+ u^*_2= c_1$. Так как $y^*_3>0$, то $u^*_3= 0$. В уравнении выразим u^*_2 через u^*_1: $u^*_2=c_1- a_1u^*_1$. Так как $a_2u^*_1\geq c_2$, из условия, что $v^*_2\geq 0$, то $u^*_1\geq \frac{c_2}{a_2} =\gamma_2$. Положим, что $u^*_1 =\gamma_2 t$, где $t\geq1$. Тогда, $u^*_2=c_1-a_1\frac{c_2}{a_2}\ t= \frac{c_1k_0-c_1kt}{k_0} = \frac{c_1(k_0-kt)}{k_0}$. Это условие равносильно тому, что $k_0-kt \geq0$, откуда получаем, что $t\leq\frac{k_0}{k}$. Из условий, накладываемых на параметр t, получаем, что $\frac{k_0}{k}\geq1$ или $k\leq k_0$. Опять отдельно рассмотрим случаи, когда $k<k_0$ и $k=k_0$.

2.1.1. Решение задачи, когда отношение расхода ресурса для второго вида продукции к первому виду меньше отношения показателей эффективности этих видов продукции

Пусть $k<k_0$, тогда $u^*_1 =\gamma_2 t$, $u^*_2= \frac{c_1(k_0-kt)}{k_0}$, $v^*_2=c_2t -c_2= c_2\,(t-1) >0$, где $1\leq t\leq\frac{k_0}{k}$. Значение целевой функции двойственной задачи будет равно:

$W_{\min}= \gamma_2 t\cdot b+n_1\cdot \frac{c_1(k_0-kt)}{k_0}= c_1\cdot n_1$, так как $\gamma_2\cdot b=\frac{c_2}{a_2}\cdot a_1\cdot n_1=\frac{kc_1}{k_0}\cdot n_1$.

Решением двойственной задачи будет: $U^*=\left(\gamma_2 t;\frac{c_1(k_0-kt)}{k_0};0\right)$, где $1\leq t\leq\frac{k_0}{k}$, $V^*=(0;(t-1)c_2)$, $W_{\min}= c_1\cdot n_1$.

2.1.2. Решение задачи, когда отношение расхода ресурса двух видов продукции равно отношению показателей эффективности производства этих видов продукции

Пусть $k =k_0$. Также $u^*_1 =\gamma_2 t =\gamma_1 t =\gamma_0 t$, $u^*_2= \frac{c_1(k_0-k_0t)}{k_0}$, $v^*_2=c_2t -c_2=c_2\,(t-1)$, где $1\leq t\leq\frac{k_0}{k_0}=1$. Из двойного неравенства следует, что $t=1$. Получаем, $u^*_1=\gamma_0$, $u^*_2=0$,

v^*_2=0. Целевая функция равна: $W_{\min}=\gamma_0\cdot b= c_1\cdot n_1$. В итоге: $U^*=(\gamma_0;0;0)$, $V^*=(0;0)$, $W_{\min}= c_1\cdot n_1$.

Когда ресурс дефицитный и спрос на первый вид продукции влияет на производство, то оптимальный план в прямой задачи равен $X^*=(n_1;0)$, $Y^*=(0;0;n_2)$, $Z_{\max}=c_1\cdot n_1$. Решение задачи также как и в части 1 зависит от отношения коэффициентов k и k_0. При $k<k_0$ $U^*=\left(\gamma_2 t;\frac{c_1(k_0-kt)}{k_0};0\right)$, $V^*=(0;(t-1)c_2)$, где $1\le t\le\frac{k_0}{k}$. При $k=k_0$ $U^*=(\gamma_0;0;0)$, $V^*=(0;0)$.

2.2. Решение задачи в случае, когда спрос по второму виду продукции влияет на производство продуцкции, а по первому виду – не влияет

Переходим к условиям, когда ресурс будет дефицитный, спрос на второй вид продукции влияет на показатель эффективности производства ($x^*_2=n_2$), а на первый вид не влияет ($x^*_1<n_1$).

Одно из сформулированных условий не выполняется, если $x^*_1>0$ и $x^*_2>0$, а также $x^*_1>0$ и $x^*_2=0$. Рассматриваем только дополнительные условия, когда $x^*_1=0$; $x^*_2>0$.

Итак, $x^*_1=0$, $x^*_2=\frac{b}{a_2}=n_2$. Переменные y^*_1, y^*_2, y^*_3 равны: $y^*_1=0$, $y^*_2= n_2$, $y^*_3=0$. Максимальное значение целевой функции равно: $Z_{\max}=c_2\cdot n_2$. Решение прямой задачи: $X^*=(0;n_2)$, $Y^*=(0;n_1;0)$, $Z_{\max}=c_2\cdot n_2$.

Так как $x^*_2>0$, то $a_2u^*_1+ u^*_3= c_2$. Так как $y^*_2>0$, то $u^*_2= 0$. В уравнении выразим u^*_3 через u^*_1: $u^*_3=c_2- a_2u^*_1$. Так как $a_1u^*_1\ge c_1$, из условия, что $v^*_1\ge 0$, то $u^*_1\ge \frac{c_1}{a_1}=\gamma_1$. Положим, что $u^*_1=\gamma_1 t$, где $t\ge1$. Тогда, $u^*_3=c_2- a_2\frac{c_1}{a_1}t= kc_1-c_1k_0t = c_1(k-k_0t)$, что равносильно тому, что $k-k_0t\ge0$ или $t\le\frac{k}{k_0}$. Из условий, накладываемых на параметр t, получаем, что $\frac{k}{k_0}\ge1$ или $k\ge k_0$. Рассматриваем случаи, когда $k>k_0$ и $k=k_0$.

Пусть $k>k_0$, тогда $u^*_1=\gamma_1 t$, $u^*_3= c_1(k-k_0t)$, $v^*_1=c_1t-c_1= c_1(t-1)>0$, где $1\le t\le\frac{k}{k_0}$. Значение целевой функции двойственной задачи будет равно:

$W_{\min}=\gamma_1 t\cdot b+n_2\cdot c_1\cdot(k-k_0t)=c_2\cdot n_2$, так как $\gamma_1\cdot b=\frac{c_1}{a_1}\cdot a_2\cdot n_2=c_1\cdot k_0n_2$.

Решением двойственной задачи будет: $U^*=\left(\gamma_1 t;0;\ c_1(k-k_0t)\right)$,

$W_{\min}= c_1\cdot n_1$, $V^*=((t-1)c_1;0)$, где $1\le t\le\frac{k}{k_0}$.

Пусть $k=k_0$, $u^*_1=\gamma_0 t$, $u^*_3= c_1(k-k_0t)$, $v^*_1=c_1t-c_1= c_1(t-1)$, где $1\le t\le\frac{k_0}{k_0}=1$ или $t=1$. Получаем, $u^*_1=\gamma_0$, $u^*_3=0$, $v^*_1=0$. Целевая функция равна: $W_{\min}=\gamma_0\cdot b= c_2\cdot n_2$. В итоге: $U^*=(\gamma_0 t;0;0)$, $V^*=(0;0)$, $W_{\min}= c_2\cdot n_2$.

Когда ресурс дефицитный и спрос на второй вид продукции влияет на производство, то оптимальный план в прямой задачи равен $X^*=(0;n_2)$, $Y^*=(0;n_1;0)$, $Z_{\max}=c_2\cdot n_2$. Решение двойственной задачи в зависимости от отношения коэффициентов k и k_0 и равно: при $k>k_0$ $U^*=\left(\gamma_1 t;0;\ c_1(k-k_0t)\right)$,

$W_{\min}= c_1\cdot n_1$, $V^*=((t-1)c_1;0)$, где $1\le t\le\frac{k}{k_0}$, при $k=k_0$ $U^*=(\gamma_0;0;0)$, $V^*=(0;0)$.

В общем случае, когда ресурс дефицитный и спрос только одного вида продукции влияет на производство, то весь ресурс расходуется на этот вид продукции и обеспечивает его спрос. Производство другого вида продукции и его спрос никак не влияют на оптимальное производство.

3. Решение пары задач в случае, когда ресурс является дефицитным и спрос по обоим видам проукции влияет на производство продукции

Пусть ресурс будет дефицитным ($a_1x^*_1+ a_2x^*_2 =b$), спрос на оба вида продукции влияет на производство продукции ($x^*_1=n_1$, $x^*_2=n_2$).

Случаи, когда $x^*_1>0$ и $x^*_2=0$, $x^*_1>0$ и $x^*_2>0$, рассматривать не будем, так как $n_1>0$ и $n_2>0$. Остаётся рассмотреть только случай, когда $x^*_1>0$ и $x^*_2>0$.

Предполагаем, что справедливы уравнения $a_1x^*_1+ a_2x^*_2=b$, $x^*_1=n_1$, $x^*_2=n_2$. Отсюда следует, что выполняется условие $a_1n_1+ a_2\ n_2=b$. Решением прямой задачи при этих условиях будет: $X^*=(n_1;n_2)$, $Y^*=(0;0;0)$, максимальное значение целевой функции равно $Z_{\max}=c_1\cdot n_1+ c_2\cdot n_2$.

Решаем двойственную задачу. Так как $x^*_1>0$ и $x^*_2>0$, то $a_1u^*_1+ u^*_2= c_1$ и $a_2u^*_1+ u^*_3= c_2$. В уравнениях выразим u^*_2 и u^*_3 через u^*_1: $u^*_2=c_1- a_1u^*_1$ и $u^*_3=c_2-a_2u^*_1$. Так как $u^*_2\ge 0$ и $u^*_3\ge 0$, то $c_1- a_1u^*_1\ge0$ и $c_2- a_2u^*_1\ge0$. Получаем условия для u^*_1: $u^*_1\le\gamma_1$ и $u^*_1\le\gamma_2$. В итоге $u^*_1\le \min(\gamma_1;\gamma_2)$.

Рассмотрим три случая для коэффициента k: $k<k_0$, $k=k_0$ и $k>k_0$.

Если $k<k_0$, то $\gamma_1\ge\gamma_2$ и $u^*_1\le \gamma_2$. Полагаем, что $u^*_1=\gamma_2t$, где $0\le t\le1$. Тогда $u^*_2=c_1-a_1\frac{c_2}{a_2}\ t= \frac{c_1(k_0-kt)}{k_0}$, $u^*_3=c_2- a_2\frac{c_2}{a_2}\ t=c_2(1- t)$. Вычисляем минимальное значение целевой функции: $W_{\min}=\gamma_2\cdot tb+\frac{c_1(k_0-kt)}{k_0}\cdot n_1+c_2(1- t)\cdot n_2=\gamma_2t\cdot b - \frac{c_1kt}{k_0}\cdot n_1+ +c_1\cdot n_1 +c_2\cdot n_2-c_2t\cdot n_2=\gamma_2t\cdot b - \frac{a_1c_2}{a_2}\cdot tn_1+ c_1\cdot n_1 +c_2\cdot n_2- a_2\cdot\gamma_2t\cdot n_2=c_1\cdot n_1 +c_2\cdot n_2+ t\cdot\gamma_2\cdot(b-$

$-a_1n_1- a_2n_2)$.Так как выполняется условие, что $a_1n_1+a_2n_2= b$, то $W_{\min}=c_1\cdot n_1 + +c_2\cdot n_2$. В итоге, решение двойственной задачи: $U^*=\left(\gamma_2t;\frac{c_1(k_0-kt)}{k_0};c_2(1-t)\right)$, $V^*=(0;0)$, $W_{\min}=c_1\cdot n_1 +c_2\cdot n_2$.

Если $k=k_0$, то $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_0$. Полагаем, что $u^*_1=\gamma_0t$, где $0\le t\le1$. Тогда $u^*_2=c_1-a_1\frac{c_1}{a_1}\ t= c_1(1- t)$, $u^*_3=c_2- a_2\frac{c_2}{a_2}\ t=c_2(1- t)$. Вычисляем минимальное значение целевой функции: $W_{\min}=\gamma_0\cdot tb+ c_1(1- t)\cdot n_1+c_2(1- t)\cdot n_2=\gamma_2t\cdot b - c_1t\cdot n_1+c_1\cdot n_1 +c_2\cdot n_2-c_2t\cdot n_2=c_1\cdot n_1 +c_2\cdot n_2+ t\cdot(\gamma_0\cdot b-c_1n_1- c_2n_2) =c_1\cdot n_1 +c_2\cdot n_2+ t\cdot\gamma_0\cdot(b- \gamma_0a_1n_1- \gamma_0a_2n_2)= =c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2+ t\cdot\gamma_0\cdot(b-a_1n_1- a_2n_2)$.Так как выполняется условие, что $a_1n_1+a_2n_2= =b$, то $W_{\min}=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$. В итоге, решение двойственной задачи: $U^*=(\gamma_0t;c_1(1-t);c_2(1-t))$, $V^*=(0;0)$, $W_{\min}=c_1\cdot n_1 +c_2\cdot n_2$.

Если $k>k_0$, то $\gamma_2\ge\gamma_1$. Тогда значения переменных двойственной задачи равны: $u^*_1=\gamma_1t$, где $0\le t\le1$, $u^*_2=c_1-a_1\frac{c_1}{a_1}\ t = c_1(1- t)$, $u^*_3=c_2- a_2\frac{c_1}{a_1}\ t= c_1(k-k_0t)$. Вычисляем минимальное значение целевой функции: $W_{\min}=\gamma_1\cdot tb+c_1(1- t)n_1 + c_1(k-k_0t)\cdot n_2=\gamma_1t\cdot b-$

$c_1 t\cdot n_1+c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2-\ \gamma_1 a_2 t\cdot n_2=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2+\ \ t\cdot\gamma_1\cdot(b-a_1 n_1-a_2 n_2)=\ =c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$. В итоге, решение двойственной задачи:

$U^*=(\gamma_1 t; c_1(1-t); c_1(k-k_0 t))$, $V^*=(0;0)$, $W_{\min}=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$.

Когда ресурс дефицитный и спрос обоих видов продукции влияет на производство, то оптимальный план в прямой задачи равен $X^*=(n_1; n_2)$, $Y^*=(0;0;0)$, $Z_{\max}=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$. Решение двойственной задачи в зависимости от отношения коэффициентов k и k_0 и будет иметь вид:

при $k<k_0$ $U^*=\left(\gamma_2 t; \frac{c_1(k_0-kt)}{k_0}; c_2(1-t)\right)$, $V^*=(0;0)$, где $0\le t\le 1$;

при $k=k_0$ $U^*=(\gamma_0 t; c_1(1-t); c_2(1-t))$, $V^*=(0;0)$, где $0\le t\le 1$;

при $k>k_0$ $U^*=(\gamma_1 t; c_1(1-t); c_1(k-k_0 t))$, $V^*=(0;0)$, где $0\le t\le 1$.

4. Решение пары задач в случае, когда ресурс не является дефицитным

Пусть ресурс будет избыточным ($a_1 x^*_1+\ a_2 x^*_2\ <b$), спрос на оба вида продукции влияет на производство продукции ($x^*_1=n_1$, $x^*_2=n_2$).

Предполагаем, что справедливы уравнения $x^*_1=n_1$ и $x^*_2=n_2$, а также неравенство $a_1 x^*_1+a_2 x^*_2<b$. Тогда выполняется условие $a_1 n_1+a_2 n_2<b$.

Решением прямой задачи при этих условиях будет: $X^*=(n_1; n_2)$, $Y^*=(b-a_1 n_1-a_2 n_2; 0; 0)$, максимальное значение целевой функции равно $Z_{\max}=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$.

Решаем двойственную задачу. Так как $y^*_1>0$, то $u^*_1=0$, так $x^*_1>0$ и $x^*_2>0$, то $u^*_2=\ c_1$ и $u^*_3=\ c_2$. Вычисляем минимальное значение целевой функции: $W_{\min}=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$. Решением двойственной задачи будет: $U^*=(0; c_1; c_2)$, $V^*=(0;0)$, $W_{\min}=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$.

В случае, когда ресурс не является дефицитным, а спрос обоих видов продукции влияет на производство, то оптимальный план в прямой задачи равен $X^*=(n_1; n_2)$, $Y^*=(b-a_1 n_1-a_2 n_2; 0; 0)$, $Z_{\max}=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$. Решение двойственной задачи не зависит от отношения коэффициентов k и k_0 и будет иметь вид: $U^*=(0; c_1; c_2)$, $V^*=(0;0)$.

5. Выводы

Оценки влияния спроса по видам продукции и предельные полезности изменяются в зависимости от условий производства. В качестве таких условий рассматриваются потребление ресурса и его статус (дефицитный или избыточный), а также влияние спроса по двум видам продукции (есть влияние или нет). Эти условия определяют при оптимальном плане равенство ($a_1 x^*_1+a_2 x^*_2=b$) или неравенство ($a_1 x^*_1+a_2 x^*_2<b$) расхода ресурса его запасу, выпуск продукции, удовлетворяющий спрос на него ($x^*_1=n_1$, $x^*_2=n_2$) или не удовлетворяющий ($x^*_1<n_1$, $x^*_2<n_2$).

Решения пары двойственных задач рассматриваются для четырёх случаев.

1. Когда ресурс является дефицитным, а вляния спроса обоих видов продукции нет. Решение пары задач зависит от отношения коффициента пропорциональности расхода ресурса в продукции первого и второго вида (k_0) и отношения показателей эффективности производства этих видов (k).

При $k<k_0$ оптимальным планом прямой задачи будет план $X^*=\left(\frac{b}{a_1};0\right)$, $Y^*=\left(0;n_1-\frac{b}{a_1};n_2\right)$, $Z_{max}=\gamma_1\cdot b$. Решением двойственной задачи будут оценки $U^*=(\gamma_1;0;0)$, $V^*=(0;(k_0-k)c_1)$.

При $k=k_0$ соответственно решение прямой задачи $X^*=\left(\frac{b(1-t)}{a_1};\frac{b}{a_2}t\right)$, $Z_{max}=\gamma_0\cdot b$,

$Y^*=\left(0;n_1-\frac{b(1-t)}{a_1};n_2-\frac{b}{a_2}t\right)$, $Z_{max}=\gamma_0\cdot b$. Решение двойственной задачи: $U^*=(\gamma_0;0;0)$, $V^*=(0;0)$.

При $k>k_0$ решение прямой задачи $X^*=\left(0;\frac{b}{a_2}\right)$, $Y^*=\left(0;n_1;n_2-\frac{b}{a_2}\right)$, $Z_{max}=\gamma_2\cdot b$. Решение двойственной задачи: $U^*=(\gamma_2;0;0)$, $V^*=\left(\frac{(k-k_0)c_1}{k_0};0\right)$.

2. Когда ресурс является дефицитным, спрос на один из двух видов влияет на производство, а другой нет. В частности, если наблюдается влияние спроса на первый вид продукции, то оптимальным будет план $X^*=(n_1;0)$, $Y^*=(0;0;n_2)$, $Z_{max}=c_1\cdot n_1$. В двойственной задаче решение зависит от отношения коэффициентов k и k_0. При $k=k_0$ $U^*=(\gamma_0;0;0)$, $V^*=(0;0)$.

При $k<k_0$ $U^*=\left(\gamma_2 t;\frac{c_1(k_0-kt)}{k_0};0\right)$, $V^*=(0;(t-1)c_2)$, где $1\le t\le\frac{k_0}{k}$. Когда наблюдается спрос на второй вид продукции, то оптимальным будет план $X^*=(0;n_2)$, $Y^*=(0;n_1;0)$, $Z_{max}=c_2\cdot n_2$, а в двойственной задаче зависимости от отношения коэффициентов k и k_0 оптимальным будет решение: при $k>k_0$ $U^*=\left(\gamma_1 t;0;\ c_1(k-k_0 t)\right)$, $V^*=((t-1)c_1;0)$, где $1\le t\le\frac{k}{k_0}$, При $k=k_0$ $U^*=(\gamma_0;0;0)$, $V^*=(0;0)$.

В общем случае, когда ресурс дефицитный и спрос только одного вида продукции влияет на производство, то производство ориентировано на выпуск того вида продукции, для которого налюдается влияние спроса.

3. Когда наблюдается вляние спроса обоих видов продукции и ресурс является дефицитным, оптимальным будет план $X^*=(n_1;n_2)$, $Y^*=(0;0;0)$, $Z_{max}=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$. Решение двойственной задачи в зависимости от отношения коэффициентов k и k_0 и будет иметь вид:

при $k<k_0$ $U^*=\left(\gamma_2 t;\frac{c_1(k_0-kt)}{k_0};\mathrm{c}_2(1-t)\right)$, $V^*=(0;0)$, где $0\le t\le 1$;

при $k=k_0$ $U^*=\left(\gamma_0 t;\mathrm{c}_1(1-t);\mathrm{c}_2(1-t)\right)$, $V^*=(0;0)$, где $0\le t\le 1$;

при $k>k_0$ $U^*=\left(\gamma_1 t;\mathrm{c}_1(1-t);\mathrm{c}_1(k-k_0 t)\right)$, $V^*=(0;0)$, где $0\le t\le 1$.

4. Когда ресурс является избыточным, оптимальным будет план $X^*=(n_1;n_2)$, $Y^*=(b-a_1n_1-a_2n_2;0;0)$, $Z_{max}=c_1\cdot n_1+c_2\cdot n_2$. Решение двойственной задачи не

зависит от отношения коэффициентов k и k_0 и будет иметь вид: $U^*=(0; c_1; c_2)$, $V^*=(0; 0)$.

Библиографический список

1. О. В. Мамонов, А. В. Конюхова. Определение зависимости предельной полезности ресурса и оценок влияния факторов производства от минимальной нормы производства второго вида продукции/ Актуальные проблемы агропромышленного комплекса: сб. трудов научно-практической конференции преподавателей, студентов, магистрантов и аспирантов Новосибирского государственного аграрного университета (г. Новосибирск, 16-17 октября 2017 г.), выпуск 2. / Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск: ИЦ «Золотой колос», 2017. – 365 с.
2. О. В. Мамонов, Р. В. Луцик. Пример расчёта оценки влияния спроса на доход предприятия с двумя ресурсами: сб. трудов научно-практической конференции преподавателей, студентов, магистрантов и аспирантов Новосибирского государственного аграрного университета (г. Новосибирск, 16-17 октября 2017 г.), выпуск 2. / Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск: ИЦ «Золотой колос», 2017. – 365 с.
3. О. В. Мамонов. Анализ использования двух ресурсов предприятия с двумя видами продукции с помощью графического способа решения задачи линейного программирования: Агропродовольственная экономика: научно-практический электронный журнал. Нижний Новгород: НОО «Профессиональная наука» - No10 - 2016. – 7-42 с.
4. Р.Ш. Хуснутдинов. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 224 с., 500 экз.
5. О.А. Сдвижков. Практикум по методам оптимизации - М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 200 с., 500 экз.
6. Экономико-математические методы в примерах и задачах: Учеб. пос. / А.Н. Гармаш, И.В.Орлова, Н.В.Концевая и др.; Под ред. А.Н.Гармаша - М.: Вуз. уч.: НИЦ ИНФРА-М, 2014 - 416с., 700 экз.
7. Экономическая теория. Микроэкономика: Учебник/ Под ред. Г. П. Журавлёвой - ИТК «Дашков и К, 2014. - 914 с.
8. Экономика: Учебник/ Под ред. А. С. Булатова - Юристъ, 2002.-896 с.
9. В. В. Федосеев. Экономико-математические модели и прогнозирование рынка труда: Учеб. пособие - 2-е изд., доп. и испр. - М.: Вузовский учебник, 2010. - 144 с., 500 экз.