Мамонов О. В. Анализ эффективного использования двух ресурсов для предприятия, выпускающего два вида продукции

Аннотация. *Целью исследования является изучение зависимости предельных полезностей ресурсов от изменения объёмов двух ресурсов для предприятия, которое производит два вида продукции. Предметом исследование является предприятие, которое производит два вида продукции и использует два вида ресурсов, у которых объёмы запасов изменяются. Использование ресурсов в производстве представлено в виде пары двойственных задач линейного программирования. Поставлена задача исследования: определить изменение двойственных оценок использования двух ресурсов от их запасов на предприятии. Определены параметры производства, с помощью которых производится исследование: отношение расхода ресурса на единицу одного вида продукции к расходу на единицу другого вида, отношение затрат одного ресурса ко второму ресурсу для каждого вида продукции, отношение показателя эффективности производства одного вида продукции к другому, отношение запаса одного ресурса к другому. Приведено подробное решение задач для различных вариантов значений параметров графическим способом. Для каждого варианта построены карты предельных полезностей ресурсов и определены свойства ресурсов в областях карты. Рассмотрены особые случаи для значений параметров и проведён экономический анализ этих случаев. Рассмотрены особенности расхода ресурсов для вырожденных случаев решения задач.*

Ключевые слова. *Анализ предприятия, ресурсы, производство, эффективность производства, задача об использовании ресурсов, предельная полезность ресурса, стоимость ресурса, линейное программирование, графический способ решения задачи линейного программирования, карта предельных полезностей ресурсов, дефицитный ресурс, избыточный ресурс, насыщенность производства потреблением ресурса.*

Введение

Эффективное использование ресурсов одно из важных условий эффективного производства продукции. Одним из показателей эффективного использования ресурса является его оценка эффективности использования. Для нахождения оценки использования ресурса могут использоваться методы линейного программирования, в которых оценкой эффективности использования ресурса является двойственная оценка ресурса.

По оценкам эффективности использования ресурсов определятся категории ресурсов, с помощью которых задаётся качество ресурса при использовании его в производстве продукции. Выделяются три категории качества ресурсов: дефицитные ресурсы, избыточные ресурсы и ресурс, для которых производство насыщено потреблением ресурса. Эти категории рассматривались в работе [8].

1. Постановка задачи о зависимости предельной эффективности двух ресурсов, используемых в производстве двух видов продукции

Рассмотрим предприятие, которое использует два вида ресурсов R_1 и R_2 и производит два вида продукции A_1 и A_2. Предполагаем, что влияние других факторов производства продукции или несущественно, или не влияет на показатель эффективности производства. Считаем, что заданы нормы затрат обоих ресурсов по каждому из двух видов продукции, значения показателей эффективности производства для единицы каждого вида продукции. Нужно определить зависимость двойственных оценок обоих ресурсов от запасов ресурсов, объёмы которых изменяются, при условии максимизации показателя эффективности производства продукции.

2. Построение экономико-математической модели задачи использования ресурсов

Обозначим: нормы затрат ресурсов по видам продукции через a_{ij}, показатели эффективности производства единицы продукции каждого вида через c_j, где i–номер ресурса, а j – номер вида продукции. Также определим через r_1 – объём запаса первого ресурса, а r_2 – объём запаса второго ресурса.

Для построения пары двойственных задач определим переменные прямой и двойственных задач для задачи использования ресурсов. Положим в прямой задаче x_1 – объём производства продукции вида A_1, а x_2 – объём производства второго вида продукции вида A_2, Z – значение показателя эффективности произведённой продукции. Для двойственной задачи определим двойственные оценки эффективного использования ресурсов u_1 и u_2 соответственно, W – суммарную двойственную оценку эффективности запасов обоих ресурсов.

В прямой задаче определим условия по использованию ресурсов. Эти условия означают, что количество использованного в производстве ресурса не превосходит его объёма запаса. Тогда прямая задача будет иметь вид:

$$Z = \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \to \max$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & \le & r_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & \le & r_2 \end{cases} \quad (1).$$

Первое неравенство в системе условий задачи (1) определяет ограничение на использование ресурса R_1, а второе ограничение – на использование ресурса R_2.

В двойственной задаче определим условия, когда продукцию данного вида выпускать не выгодно. Эти условия означают, что двойственная оценка ресурсов, используемых в производстве данного вида продукции, должна быть не меньше показателя эффективности произведённой продукции данного вида. Тогда двойственная задача будет иметь вид:

$$W = \quad r_1 u_1 + r_2 u_2 \quad \to \max$$

$$u_1 \ge 0 \quad u_2 \ge 0$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1 & + a_{21}u_2 & \ge & c_1 \\ a_{12}u_1 & + a_{22}u_2 & \ge & c_2 \end{cases} \quad (2).$$

Первое неравенство в системе условий задачи (2) определяет ограничение, когда не выгодно выпускать продукцию A_1, а второе – когда не выгодно выпускать продукцию A_2.

3. Параметры производства продукции каждого вида и расхода ресурсов, влияющие на решение пары двойственных задач

Для анализа влияния на показатели эффективности производства введём для ресурсов коэффициенты, которые показывают, во сколько раз в производстве единицы продукции второго вида продукции расходуется больше ресурса, чем в производстве в единице первого вида. Эти коэффициенты будем называть относительными коэффициентами использования ресурса в продукции второго вида продукции относительно первого вида. Обозначим эти коэффициенты через k_1 для ресурса R_1 и k_2 для ресурса R_2. Их значения определим по формулам: $k_1 = a_{12} / a_{11}$, $k_2 = a_{22} / a_{21}$. По умолчанию будем предполагать, что $k_1 < k_2$. Случай, когда $k_1 = k_2$, будем рассматривать отдельно.

Кроме этого, для анализа будем использовать коэффициент относительной оценки эффективности производства продукции второго вида A_2 по отношению к первому виду A_1, который показывает, во сколько раз значение показателя эффективности производства единицы продукции вида A_2 больше показателя эффективности производства единицы продукции вида A_1. Этот коэффициент обозначим через k и будем вычислять по формуле: $k = c_2 / c_1$. По умолчанию будем предполагать, что $k \neq k_1$ и $k \neq k_2$. Случаи, когда $k=k_1$ и $k=k_2$ и $k=k_1=k_2$ рассмотрим отдельно.

При таких обозначениях прямая задача будет записываться в виде:

$$Z = \quad c_1 x_1 + c_1 k x_2 \quad \to \max$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{11}k_1 x_2 & \leq & r_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{21}k_2 x_2 & \leq & r_2 \end{cases} \quad (3).$$

Возможны три случая соотношений между k, k_1 и k_2: 1) $k<k_1<k_2$; 2) $k_1<k<k_2$; 3) $k_1<k_2<k$.

Определение зависимостей предельных полезностей от запасов ресурсов будем осуществлять последовательно по коэффициенту k. По умолчанию всегда будем предполагать, что $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, $u_1 \geq 0$ и $u_2 \geq 0$.

4. Зависимость предельных двойственных оценок ресурсов, когда $0<k<k_1$

Рассмотрим зависимость предельных двойственных оценок ресурсов $u_1^*(r_1;r_2)$ для R_1 и $u_2^*(r_1;r_2)$ для R_2, когда $0<k<k_1$. Эту зависимость будем определять с помощью решения двойственной задачи. Двойственная задача имеет систему условий (2). Определим ОДР для этой системы.

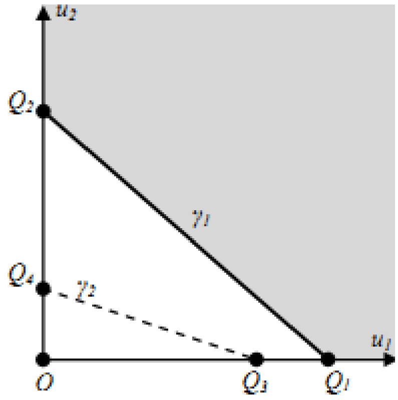

Рисунок 1. ОДР двойственной задачи при $0<k<k_1$

ОДР строим в первой четверти плоскости u_1Ou_2. Границу решения первого неравенства обозначим γ_1, а второго неравенства γ_2. Тогда уравнение γ_1 будет иметь вид $a_{11}u_1+a_{21}u_2=c_1$, а уравнение γ_2: $a_{21}u_1+a_{22}u_2=c_2$.

Найдём координаты пересечения этих прямых с осями координат.

Точка пересечения прямой γ_1 с осью Ou_1 будет точка $Q_1=(c_1/a_{11};0)$, а с осью Ou_2 точка $Q_2=(0;c_1/a_{21})$. Обозначим c_1/a_{11} *через* u_{11}, а c_1/a_{21} через u_{12}. Тогда $Q_1=(u_{11};0)$, а $Q_2=(0;u_{12})$. Прямую γ_1 можно представлять как прямую Q_1Q_2.

Точка пересечения прямой γ_2 с осью Ou_1 будет точка $Q_3=(c_2/a_{12};0)$, а с осью Ou_2 точка $Q_4=(0;c_2/a_{22})$. Аналогично первой прямой, обозначим c_2/a_{12} как u_{21}, а c_2/a_{22} как u_{22}. Тогда $Q_3=(u_{21};0)$, а $Q_4=(0;u_{22})$. Также прямую γ_2 можно представлять как прямую Q_3Q_4.

Рассмотрим отношение $\frac{u_{11}}{u_{21}}$ координат u_1 для точек Q_1 и Q_3. Преобразуем его: $\frac{u_{11}}{u_{21}}=\frac{c_1/a_{11}}{c_2/a_{12}}=\frac{a_{12}/a_{11}}{c_2/c_1}=\frac{k_1}{k}>1$. Это означает, что точка Q_1 лежит дальше от начала координат, чем точка Q_3 (рис. 1).

Также определим отношение для координат u_2 для точек Q_2 и Q_4. Отношение равно: $\frac{u_{12}}{u_{22}}=\frac{c_1/a_{21}}{c_2/a_{22}}=\frac{a_{22}/a_{21}}{c_2/c_1}=\frac{k_2}{k}>1$. Это означает, что и точка Q_2 лежит дальше от начала координат, чем точка Q_4 (рис. 1). Тогда ОДР задачи будет область $u_1Q_1Q_2u_2$ (рис. 1).

Для решения двойственной задачи определим показатели относительного использования ресурсов для производства единицы продукции. Зададим для каждого вида продукции коэффициент, который показывает, во сколько раз в производстве единицы продукции данного вида расходуется больше ресурса R_2, чем ресурса R_1. Эти коэффициенты обозначим через β_1 для продукции A_1 и β_2 для продукции A_2. Их значения определим по формулам: $\beta_1=a_{21}/a_{11}$, $\beta_2 = a_{22}/a_{12}$. Так как $k_1<k_2$, то $\beta_1<\beta_2$.

Действительно, $a_{22}/a_{11} = \beta_1 \cdot k_2$ с одной стороны, $a_{22}/a_{11} = k_1 \cdot \beta_2$ с другой стороны. Отсюда получаем, что $\beta_1 \cdot k_2= k_1 \cdot \beta_2$. Тогда $\beta_2= \beta_1 \cdot k_2/ k_1> \beta_1$, так как $k_1<k_2$.

Определим ещё один коэффициент. Этот коэффициент будет показывать, во сколько раз запас второго ресурса превышает запас первого. Его обозначим через β и будем вычислять по формуле: $\beta = r_2/r_1$. Двойственную задачу тогда можно представить в виде:

$$W = r_1u_1 + r_1\beta u_2 \quad \to \max$$

$$u_1 \ge 0 \quad u_2 \ge 0$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{11}\beta_1 u_2 \ge c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{12}\beta_2 u_2 \ge c_2 \end{cases} \quad (4).$$

4.1. Решение задачи для $r_2<\beta_1 r_1$

Целевая функция двойственной задачи имеет вид $W= r_1u_1+r_2u_2$. При разных значениях r_1 и r_2 будут разные оптимальные планы. При $\beta<\beta_1$ решением двойственной задачи будет точка Q_2 (рис. 2). Оптимальные значения переменных: $\boldsymbol{u_1^*=0}$ и $\boldsymbol{u_2^*= u_{12}}$.

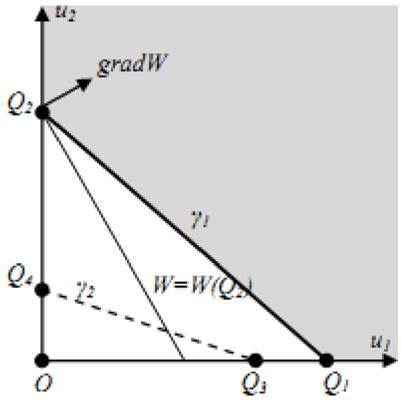

Рисунок 2. Решение двойственной задачи при $0<k<k_1$ и $r_2<\beta_1 r_1$

Найдём минимальное значение целевой функции в двойственной задаче. При $u_1^*=0$, $u_2^*= u_{12}$ значение $W= r_1u_1+r_2u_2$ будет равно: $W_{min}=r_1u_1^*+r_2u_2^*=r_2c_1/a_{21}=r_2u_{12}$.

Используя условия «дополняющей нежёсткости», найдём решение прямой задачи. Так как $u_2^*\neq 0$, то $a_{21}x_1^*+a_{22}x_2^*=r_2$. Так как $a_{21}u_1^*+a_{22}u_2^*>c_2$ (точка Q_2 не лежит на прямой γ_2), то $x_2^*=0$. Из этих условий получаем, что $x_1^*= r_2/a_{21}$. В прямой задаче оптимальным будет план $X^*=(r_2/a_{21};0)$. Введём ещё обозначения: $x_{21}= r_2/a_{21}$ и $x_{22}=r_2/a_{22}$. Тогда $X^*=(x_{21};0)$.

Из этого решения получаем, что ресурс R_2 будет дефицитным ($u_2^*\neq 0$). Определим категорию дефицитности ресурса R_1. Для этого вычислим y_1^*. По определению значение y_1^* равно: $y_1^*=r_1-(a_{11}x_1^*+a_{12}x_2^*)=r_1-a_{11}r_2/ a_{21}= =r_1-r_2/ \beta_1=(\beta_1 r_1-r_2)/ \beta_1$. Так как по предположению $r_2<\beta_1 r_1$, то и $y_1^*= (\beta_1 r_1-r_2)/ \beta_1>0$. Это означает, что ресурс R_1 будет избыточным.

4.2. Решение задачи для $r_2=\beta_1 r_1$

Пусть $\beta=r_2/r_1=\beta_1$, тогда линии уровня целевой функции $W= r_1u_1+r_2u_2$ будут параллельны прямой γ_1. Решением двойственной задачи будут все точки отрезка $[Q_1Q_2]$. Запишем общее решение двойственной задачи, как точки отрезка $[Q_1Q_2]$. Точку отрезка $[Q_1Q_2]$ можно представить как $U^*= Q_1+t(Q_2- Q_1)$, где $0\leq t\leq 1$. Отсюда находим

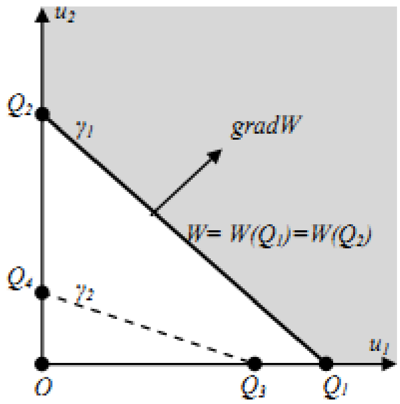

Рисунок 3. Решение двойственной задачи при $0<k<k_1$ и $r_2=\beta_1 r_1$

координаты точек U^*: $u_1^*=\frac{c_1}{a_{11}}\cdot(1-t) = u_{11}(1-t)$, а $u_2^*=\frac{c_1}{a_{21}}t = u_{12}t$. Итак, при $\boldsymbol{r_2=\beta_1 r_1}$ предельные полезности ресурсов равны $\boldsymbol{u_1^*}= u_{11}(1-t)$ и $\boldsymbol{u_2^*}= u_{12}t$. Найдём минимальное значение целевой функции в двойственной задаче:
$W_{min}= r_1u_{11}(1-t)+r_2u_{12}t= r_1u_{11}+t\,(r_2u_{12}-r_1u_{11})$. Вычислим
$r_2u_{12}-r_1u_{11}$: $r_2u_{12}-r_1u_{11}= r_1u_{12}\beta_1-r_1u_{11} = r_1\,(u_{12}\beta_1-u_{11})= =r_1(c_1a_{21}/(a_{21}a_{11})-u_{11})=r_1(c_1/a_{11}-u_{11})=r_1(u_{11}-u_{11})=0$. Отсюда следует, что $W_{min}=r_1u_{11}$.

Найдём решение прямой задачи. Так как $r_2=\beta_1 r_1$, то положим $r_1=a_{11}r$, а $r_2=a_{21}r$. При этих значениях r_1 и r_2 в прямой задаче мы получим систему условий:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{11}k_1x_2 \leq a_{11}r \\ a_{21}x_1 + a_{21}k_2x_2 \leq a_{21}r \end{cases} \quad (5).$$

Рассмотрим три случая: $t=0$, $0< t<1$ и $t=1$. Так как $\beta_2>\beta_1$, то оптимальным будет план $X^*=(r;0)$.

Пусть $t=0$, тогда $\boldsymbol{u_1}$***=**$u_{11}\neq 0$, $\boldsymbol{u_2}$***=**0, $\boldsymbol{v_1}$***=**0, так как оптимальный план при $t=0$ (точка Q_1) лежит на прямой γ_1, а $\boldsymbol{v_2}$***≠**0, так как точка Q_1 не лежит на γ_2. В прямой задаче имеем, что y_1* равен 0 и x_2* равен 0. Отсюда получаем, что план $X^*=(r;0)$ будет оптимальным.

При плане $X^*=(r;0)$ оптимальный остаток второго ресурса y_2* тоже равен нулю: $y_2^*= a_{21}\, r-(a_{21}x_1^*+a_{22}x_2^*)=a_{21}\, r-a_{21}r=0$.

Пусть $0< t<1$, тогда $\boldsymbol{u_1}$* $\neq 0$ и $\boldsymbol{u_2}$* $\neq 0$. Также $\boldsymbol{v_1}$***=**0 и $\boldsymbol{v_2}$***≠**0, так как оптимальные планы отрезка $[Q_1Q_2]$ лежат на прямой γ_1 и не лежат на γ_2. В прямой задаче имеем, что остатки y_1* и y_2* равны 0 и объём производства продукции A_2 (x_2*) тоже равен 0. Отсюда, план $X^*=(r;0)$ оптимальный.

Пусть $t=1$, тогда $\boldsymbol{u_1}$***=**0, $\boldsymbol{u_2}$***=**u_{12}. Также $\boldsymbol{v_1}$***=**0, $\boldsymbol{v_2}$***≠**0, так как точка Q_2 лежит на прямой γ_1 и не лежит на γ_2. В прямой задаче имеем, что y_2* равен 0 и x_2* равен 0. Отсюда получаем, что план $X^*=(r;0)$ будет оптимальным. Остаток первого ресурса y_1* тоже равен нулю: $y_1^*= a_{11}\, r-(a_{11}x_1^*+a_{12}x_2^*)=a_{11}\, r-a_{11}r=0$.

Мы получили, что оба ресурса расходуются полностью и среди двойственных оценок их использования есть нулевая оценка. Это означает, что изменение ресурсов должно происходить в пропорции $1:\beta$, чтобы ресурсы не стали избыточными. Это та пропорция, когда нет лишних затрат, связанных с неполным использованием ресурсов.

Действительно, если увеличить запас ресурса R_1, перейдём к случаю $\beta<\beta_1$. Тогда $y_1^*>0$ и ресурс R_1 становится избыточным. Если же увеличить запас ресурса R_2, перейдём к случаю $\beta>\beta_1$. В следующем пункте мы увидим, что ресурс R_2 также станет избыточным.

Будем говорить, в случае, когда при оптимальном плане ресурс расходуется полностью, но среди его двойственных оценок есть нулевая, то производство насыщено потреблением этого ресурса в производстве.

4.3. Решение задачи для $r_2>\beta_1 r_1$

Рассмотрим случай, когда решением двойственной задачи будет точка Q_2 (рис. 2). Тогда отношение r_2/r_1 будет больше β_1, то есть $r_2/r_1>\beta_1$. В этом случае получаем, что $r_2>\beta_1 r_1$.

При условии $\boldsymbol{r_2>\beta_1 r_1}$ решением двойственной задачи будет точка Q_1 (рис. 4), координаты которой имеют значения $\boldsymbol{u_1^*=c_1/a_{11}=u_{11}}$, а $\boldsymbol{u_2^*=0}$.

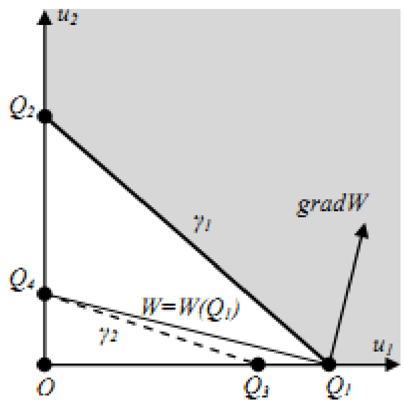

Рисунок 4. Решение двойственной задачи при $0<k<k_1$ и $r_2>\beta_1 r_1$

Минимальное значение целевой функции в двойственной задаче W равно: $W_{min}= r_1 u_{11}$.

Как и в пункте 4.1 найдём решение прямой задачи.

Так как $u_1^*\neq 0$, то $a_{11}x_1^*+a_{12}x_2^*=r_1$. Так как $a_{21}u_1^*+a_{22}u_2^*>c_2$, то $x_2^*=0$. Из этих условий получаем, что $x_1^*= r_1/a_{11}$. В прямой задаче оптимальным будет план $X^*=(r_1/a_{11};0)$. Определим $x_{11}= r_1/a_{11}$, $x_{12}= r_1/a_{12}$. Тогда $X^*=(x_{11};0)$.

Из этого решения получаем, что ресурс R_1 будет дефицитным. Определим категорию дефицитности ресурса R_2. Для этого вычислим y_2*. По определению значение y_2* равно: $y_2^*= r_2-(a_{21}x_1^*+a_{22}x_2^*)=r_2- a_{21}r_1/ a_{11}=r_2-r_1\beta_1$. Так как по предположению $r_2>\beta_1 r_1$, то и $y_2^*= r_2 - r_1\beta_1>0$. Это означает, что ресурс R_2 будет избыточным.

Отсюда получаем, что когда $\beta>\beta_1$, то ресурс R_1 будет дефицитным, а ресурс R_2 избыточным.

Вернёмся к случаю $\beta=\beta_1$. При увеличении запаса ресурса R_2 он переходит в категорию избыточного. Поэтому при $\beta=\beta_1$ производство будет насыщено потреблением ресурса R_2.

4.4. Карта предельных полезностей для $0<k<k_1$

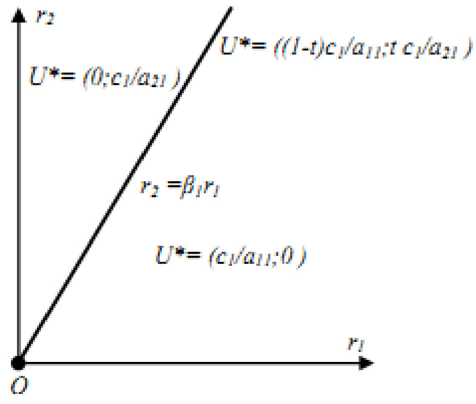

Рисунок 5. Карта предельных полезностей для $0<k<k_1$

Построим карту предельных полезностей для этой задачи при условии, что $k<k_1$. Мы получили решения этой задачи при различных соотношениях r_1 и r_2. Выпишем эти решения. Если $r_2<\beta_1 r_1$, то $\boldsymbol{U^*=(0;\ u_{12})}$. Если $r_2=\beta_1 r_1$, то $\boldsymbol{U^*=(}\ u_{11}\cdot(1-t)\,;u_{12}t\ \boldsymbol{)}$. Если $r_2>\beta_1 r_1$, то $\boldsymbol{U^*=(u_{11};0)}$.

Строим карту предельных полезностей по этим решениям (рис. 5). В первой четверти плоскости r_1Or_2 строим прямую $r_2=\beta_1 r_1$, которая определяет в четверти три области: 1) область D_1: $r_2<\beta_1 r_1$; 2) область D_2: $r_2=\beta_1 r_1$; 3) область D_3: $r_2>\beta_1 r_1$. Тогда в D_1 двойственные оценки предельных полезностей равны: $\boldsymbol{U^*=(0;u_{12})}$; в D_2 – оценки полезностей равны $\boldsymbol{U^*=(}\ u_{11}\cdot(1-t)\,;u_{12}t\ \boldsymbol{)}$; в D_3 – оценки равны $\boldsymbol{U^*=(u_{11};0)}$.

Категории ресурсов в областях будут иметь характер: 1) в области D_1 ресурс R_1 избыточный, ресурс R_2 дефицитный; 2) для обоих ресурсов производство насыщено использованием этих ресурсов; 3) в области D_1 ресурс R_1 дефицитный, а ресурс R_2 избыточный.

5. Зависимость предельных двойственных оценок ресурсов для случая, когда $k_1<k<k_2$

Рассмотрим зависимость предельных двойственных оценок ресурсов $u_1^*(r_1;r_2)$ и $u_2^*(r_1;r_2)$, когда $k_1<k<k_2$. Двойственная задача имеет ту же систему условий (2).

Определим ОДР для этой системы, полагая, что переменные двойственной задачи больше либо равны нуля ($u_1\geq 0,\ u_2\geq 0$).

Точки пересечения границ решения каждого неравенства мы уже вычисляли. Для прямой γ_1 это точки $Q_1(u_{11};0)$ и $Q_2(0;u_{12})$. Для прямой γ_2 – точки $Q_3(u_{21};0)$ и $Q_4(0;u_{22})$.

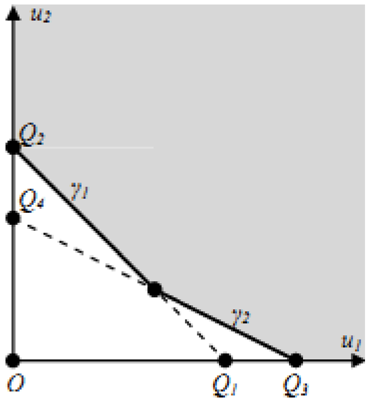

Рисунок 6. ОДР двойственной задачи при $k_1<k<k_2$

Отметим, что отношение $\dfrac{u_{11}}{u_{21}}=\dfrac{c_1/a_{11}}{c_2/a_{12}}=\dfrac{k_1}{k}<1$, так как $k>k_1$. Теперь уже точка Q_3 дальше от начала координат, чем точка Q_1 (рис. 6).

Отношение для координат u_2 для точек Q_2 и Q_4 равно $\dfrac{u_{12}}{u_{22}}=\dfrac{c_1/a_{21}}{c_2/a_{22}}=\dfrac{k_2}{k}>1$. Это означает, что точка Q_2 лежит дальше от начала координат, чем точка Q_4 (рис. 6).

Найдём координат точки пересечения прямых γ_1 и γ_2. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 & +a_{11}\beta_1 u_2 & \geq & c_1 \\ a_{12}u_1 & +a_{12}\beta_2 u_2 & \geq & c_2 \end{cases} (6).$$

Решением это системы будут значения u_1 и u_2 равные: $u_1=(c_1a_{22}-c_2a_{21})/(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$, $u_2=(c_2a_{11}-c_1a_{12})/(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$.

Положим, что $\Delta=a_{11}a_{22}\ \ a_{12}a_{21}$, $\Delta_k=k_2-k_1$, $\Delta_\beta=\beta_2-\beta_1$. Тогда $\Delta=a_{11}a_{21}(a_{22}/a_{21}-a_{12}/a_{11})=a_{11}a_{21}(k_2-k_1)=a_{11}a_{21}\Delta_k$, $\Delta=a_{11}a_{12}(a_{22}/a_{12}-a_{21}/a_{11})=a_{11}a_{21}(\beta_2-\beta_1)=a_{11}a_{12}\Delta_\beta$. Тогда u_1 и u_2 могут вычисляться ещё и по другим формулам: $u_1=(c_1a_{22}-c_2a_{21})/\Delta$, $u_2=(c_2a_{11}-c_1a_{12})/\Delta$. Таким образом, точка $Q_0=((c_1a_{22}-c_2a_{21})/\Delta;\ (c_2a_{11}-c_1a_{12})/\Delta)$ для прямых γ_1 и γ_2 будет точкой пересечения.

Ещё одно выражение для координат точки Q_0 можно определить согласно введённых обозначений: $u_{11}=c_1/a_{11}$, $u_{21}=c_1/a_{21}$, $u_{12}=c_2/a_{12}$, $u_{21}=c_2/a_{22}$.

Положим, что координат точки Q_0 равны u_{10} и u_{20} соответственно. Тогда значение $u_{10}=(c_1a_{22}-c_2a_{21})/(a_{11}a_{12}\Delta_\beta)=(u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1)/\Delta_\beta$, а значение $u_{20}=(c_2a_{11}-c_1a_{12})/(a_{11}a_{12}\Delta_\beta)=(u_{21}-u_{11})/\Delta_\beta$. Получили, $\boldsymbol{Q_0=((u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1)/\Delta_\beta;\ (u_{21}-u_{11})/\Delta_\beta)}$.

ОДР задачи будет область $u_1Q_3\,Q_0Q_2u_2$ (рис. 6). Как и в параграфе 4, будем использовать для решения двойственных задач коэффициенты β_1 и β_2, где $\beta_1<\beta_2$ и параметр $\beta=r_2/r_1$.

5.1. Решение задачи для $r_2<\beta_1 r_1$

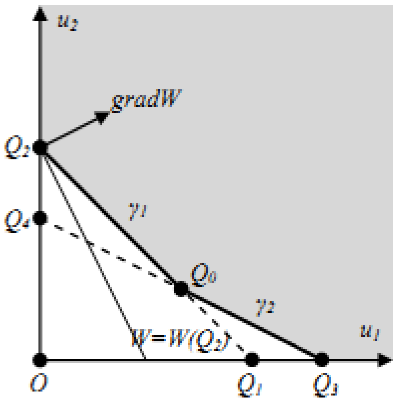

Рисунок 7. Решение двойственной задачи при $k_1<k<k_2$ и $r_2<\beta_1 r_1$

Рассмотрим случай, когда $\beta<\beta_1$ и $r_2<\beta_1 r_1$. Решением двойственной задачи будет точка Q_2 (рис. 7).

Оптимальные значения переменных двойственной задачи равны: $\boldsymbol{u_1^*=0}$ и $\boldsymbol{u_2^*=u_{12}}$.

Минимальное значение целевой функции в двойственной задаче: $W_{min}=r_2u_{12}$. Это было уже рассмотрено в пункте 4.1.

Решением прямой задачи будет план $X^*=(x_{21};0)$, $y_1^*=(\beta_1 r_1-r_2)/\beta_1>0$ и $y_2^*=0$.

При $\beta<\beta_1$ также получаем, что ресурс R_2 будет дефицитным, а ресурс R_1 избыточным.

5.2. Решение задачи для $r_2=\beta_1 r_1$

Пусть $\beta=r_2/r_1=\beta_1$. Линии уровня целевой функции $W= r_1u_1+r_2u_2$ будут параллельны прямой γ_1 (рис. 8). Решением двойственной задачи будут все точки отрезка $[Q_0Q_2]$ (рис. 8). Общее решение двойственной задачи будет имеет вид $U^*= Q_2+t(Q_0- Q_2) = Q_0t+Q_2(1-t)$, где $0\le t\le 1$. Определим значения координат точек U^*.

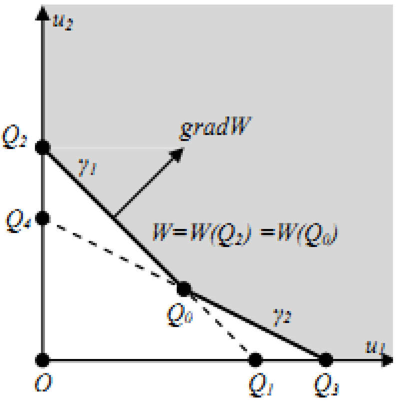

Рисунок 8. Решение двойственной задачи при $k_1<k<k_2$ и $r_2=\beta_1 r_1$

Для точек U^*: $u_1^*=u_{10}\cdot t$, $u_2^*=u_{20}t+u_{12}(1-t)$. Итак, при $\boldsymbol{r_2=\beta_1 r_1}$ предельные полезности ресурсов равны $\boldsymbol{u_1^*}=\dfrac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\cdot t$, $\boldsymbol{u_2^*}=\dfrac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\cdot t+u_{12}(1-t)=u_{12}-\dfrac{u_{12}-u_{22}}{\beta_2-\beta_1}\cdot\beta_2 t$

Найдём минимальное значение целевой функции в двойственной задаче W:

$$W_{min}= r_1\frac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\cdot t+r_2\left(u_{12}-\frac{u_{12}-u_{22}}{\beta_2-\beta_1}\cdot\beta_2 t\right)=r_1c_1/a_{11}=r_2u_{12}.$$

Найдём решение прямой задачи. Так как $r_2=\beta_1 r_1$, положим $r_1=a_{11}r$, а $r_2=a_{21}r$. Тогда в прямой задаче мы получим систему условий (5). Решением задачи будет план $X^*=(x_{11};0)$, так как $\dfrac{a_{22}}{a_{12}}=\beta_2\neq\beta_1$.

Остатки ресурсов для оптимального плана будут равны нулю: $y_1^*=0$ и $y_2^*=0$. Получаем, что оба ресурса при оптимальном плане расходуются полностью.

Проверим дефицитность обоих ресурсов.

При увеличении запаса ресурса R_1, перейдём к случаю $\beta<\beta_1$. Тогда $u_1^*=0$, ресурс становится не дефицитным, а $y_1^*>0$. Ресурс R_1 становится избыточным. При $\beta=\beta_1$, производство насыщено потреблением ресурса R_1.

Если увеличить запас ресурса R_2 получим случай $\beta_1<\beta<\beta_2$. Этот случай рассмотрим в следующем пункте.

5.3. Решение задачи для $\beta_1 r_1<r_2<\beta_2 r_1$

Перейдём к случаю $\beta_1<\beta=r_2/r_1<\beta_2$. Решением двойственной задачи будет точка отрезка Q_0 (рис. 9). Оптимальные значения переменных двойственной задачи равны: $u_1^*=\dfrac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1}$, $u_2^*=\dfrac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}$. Найдём минимальное значение целевой функции в двойственной задаче W: $W_{min}= r_1\dfrac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1}+r_2\dfrac{u_{12}-u_{22}}{\beta_2-\beta_1}$.

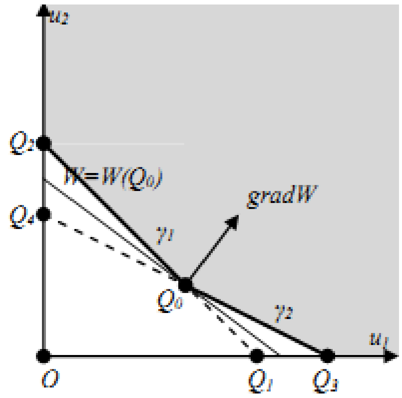

Рисунок 9. Решение двойственной задачи при $k_1<k<k_2$ и $\beta_1 r_1<r_2<\beta_2 r_1$

Найдём решение прямой задачи. Так как $u_1^*\neq 0$ и $u_2^*\neq 0$, то $y_1^*=0$ и $y_2^*=0$. Это означает, что $a_{11}x_1+a_{12}x_2=r_1$ и $a_{21}x_1+a_{22}x_2=r_2$.

В пункте 4.3 мы уже определили координаты x_{11} и x_{12}. Определим аналогично $x_{21}= r_2/a_{21}$ и $x_{22}= r_2/a_{22}$.

Зададим прямые в прямой задаче. Прямая l_1: $a_{11}x_1+a_{12}x_2=r_1$ – граница решения первого неравенства; прямая l_2: $a_{21}x_1+a_{22}x_2=r_2$ – граница решения второго неравенства.

Найдём координаты точки пересечения этих прямых как решение системы уравнений: $\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & = & r_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & = & r_2 \end{cases}$.

Переменная x_1 равна: $x_{10}=\dfrac{a_{22}r_1-a_{12}r_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\dfrac{a_{22}r_1-a_{12}r_2}{a_{11}a_{21}(a_{22}/a_{21}-a_{12}/a_{11})}=\dfrac{k_2x_{11}-k_1x_{21}}{k_2-k_1}=\dfrac{k_2x_{11}-k_1x_{21}}{\Delta_k}$.

Переменная x_2 равна: $x_{20}=\dfrac{a_{11}r_2-a_{21}r_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\dfrac{a_{11}r_2-a_{21}r_1}{a_{11}a_{21}(a_{22}/a_{21}-a_{12}/a_{11})}=$

$=\dfrac{x_{21}-x_{11}}{k_2-k_1}=\dfrac{x_{21}-x_{11}}{\Delta_k}$. Точку пересечения прямых l_1 и l_2 обозначим $X_0=(\dfrac{k_2x_{11}-k_1x_{21}}{k_2-k_1};\dfrac{x_{21}-x_{11}}{k_2-k_1})$. Так как $y_1^*=0$ и $y_2^*=0$, то $X^*=X_0$.

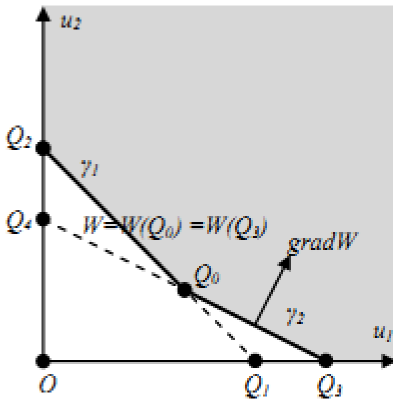

Рисунок 10. Решение двойственной задачи при $k_1<k<k_2$ и $r_2=\beta_2 r_1$

Остатки ресурсов для оптимального плана будут равны нулю: $y_1^*=0$ и $y_2^*=0$. Получаем, что оба ресурса при оптимальном плане расходуются полностью. Так как $u_1^*\neq 0$ и $u_2^*\neq 0$, то оба ресурса будут дефицитными.

Возвращаемся к предыдущему пункту. При увеличении запаса ресурса R_2, получаем случай $\beta_1<\beta<\beta_2$, где ресурс R_2 дефицитный, то и в случае $\beta=\beta_1$ ресурс R_2 дефицитный.

5.4. Решение задачи для $r_2=\beta_2 r_1$

Пусть отношение r_2/r_1 будет равен β_2. В этом случае получаем, что $r_2=\beta_2 r_1$. Решением двойственной задачи будут все точки отрезка $[Q_0Q_3]$ (рис. 10). Общее решение двойственной задачи будет иметь вид $U^*=Q_3+t(Q_0-Q_3)=Q_0t+ +Q_3(1-t)$, где $0\le t\le 1$. Определим значения координат точек U^*.

Для точек U^*: $u_1^*=u_{20}t+u_{21}(1-t)$, $u_2^*=u_{10}\cdot t$. Итак, при $\boldsymbol{r_2=\beta_1 r_1}$ предельные полезности ресурсов равны $\boldsymbol{u_1^*}=\dfrac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\cdot t+u_{21}(1-t)=u_{21}-\dfrac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\cdot\beta_2 t$, $\boldsymbol{u_2^*}=\dfrac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\cdot t$.

Найдём минимальное значение целевой функции в двойственной задаче W:

$W_{min}=r_1\left(u_{21}-\dfrac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\cdot\beta_2 t\right)+r_2\dfrac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\cdot t=r_1c_2/a_{12}==r_1u_{21}$.

Найдём решение прямой задачи. Так как $r_2=\beta_2 r_1$, положим $r_1=a_{12}r$, а $r_2=a_{22}r$. Тогда в прямой задаче мы получим систему условий:

$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \le & a_{12}r \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \le & a_{22}r \end{cases}$ (3).

Решением этой системы будет план $X^*=(0;r)$, так как $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}=\beta_1\neq\beta_2$.

Остатки ресурсов для оптимального плана будут равны нулю: $y_1^*=0$ и $y_2^*=0$. Получаем, что оба ресурса при оптимальном плане расходуются полностью.

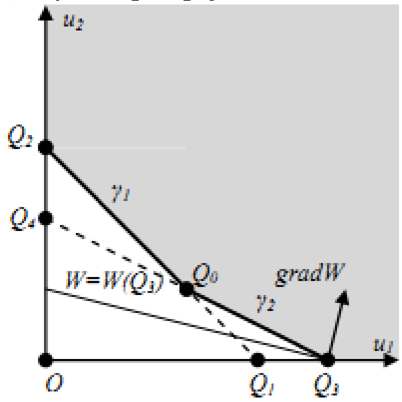

Рисунок 11. Решение двойственной задачи при $k_1<k<k_2$ и $r_2>\beta_2 r_1$

Проверим дефицитность обоих ресурсов.

При увеличении запаса ресурса R_1, перейдём к случаю $\beta_1<\beta<\beta_2$. В этом случае ресурс R_1 дефицитный. Значит и при $\beta=\beta_2$ ресурс R_1 дефицитный.

Если увеличить запас ресурса R_2 получим случай $\beta>\beta_2$. Этот случай рассмотрим в следующем пункте.

5.5. Решение задачи для $r_2>\beta_2 r_1$

Пусть отношение r_2/r_1 будет больше β_2, тогда $r_2>\beta_2 r_1$. В этом случае решением двойственной задачи будет точка Q_3 (рис. 11).

Оптимальные значения переменных двойственной задачи равны: $\boldsymbol{u_1^*=u_{21}}$ и $\boldsymbol{u_2^*=0}$.

Минимальное значение целевой функции в двойственной задаче: $W_{min}=r_1u_{21}$. Решением прямой задачи будет план $X^*=(x_{21};0)$, $y_1^*=(\beta_1 r_1-r_2)/\beta_1>0$ и $y_2^*=0$.

При $\beta>\beta_2$, как и в пункте 4.3 получаем, что ресурс R_1 будет дефицитным, а ресурс R_2 избыточным.

Вернёмся к случаю $\beta=\beta_2$. При увеличении запаса ресурса R_2 он переходит в категорию избыточного. Поэтому при $\beta=\beta_2$ производство насыщено потреблением ресурса R_2.

5.6. Карта предельных полезностей для $k_1<k<k_2$

Построим карту предельных полезностей при условии, что $k_1<k<k_2$. Выпишем решения при различных соотношениях r_1 и r_2. Если $r_2<\beta_1 r_1$, то $\boldsymbol{U^*=(0;u_{12})}$. Если $r_2=\beta_1 r_1$, то $\boldsymbol{U^*=(}\dfrac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\cdot t\,;u_{12}-\dfrac{u_{12}-u_{22}}{\beta_2-\beta_1}\cdot\beta_2 t\boldsymbol{)}$. Если $\beta_1 r_1<r_2<\beta_2 r_1$, то $\boldsymbol{U^*=(}\dfrac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\boldsymbol{;}\ \dfrac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\boldsymbol{)}$. Если $r_2=\beta_2 r_1$, то $\boldsymbol{U^*=(}u_{21}-\dfrac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\cdot\beta_2 t\boldsymbol{;}\ \dfrac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\cdot t\boldsymbol{)}$. Если $r_2>\beta_2 r_1$, то $\boldsymbol{U^*=(u_{21};0)}$.

Строим карту предельных полезностей по этим решениям (рис. 12). В первой четверти плоскости r_1Or_2 строим прямые $r_2=\beta_1 r_1$ и $r_2=\beta_1 r_1$. В четверти выделяем пять областей: 1) область D_1: $r_2<\beta_1 r_1$; 2) область D_2: $r_2=\beta_1 r_1$; 3) область D_3: $\beta_1 r_1<r_2<\beta_2 r_1$; 4) область D_4: $r_2=\beta_2 r_1$; 5) область D_5: $r_2>\beta_2 r_1$.

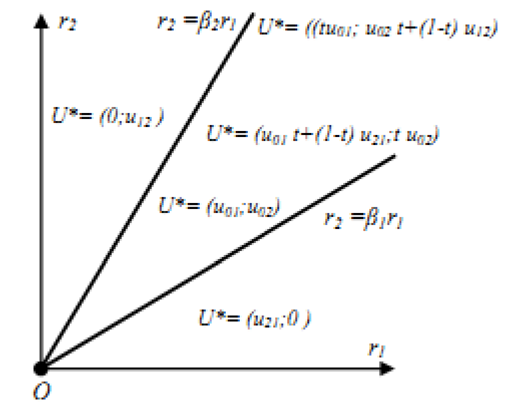

Рисунок 12. Карта предельных полезностей для $k_1<k<k_2$

Тогда в области D_1 двойственная оценка ресурсов выражается вектором $\boldsymbol{U^*=(0;c_1/a_{21})}$;

в области D_2 – $\boldsymbol{U^*=}\left(\frac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\cdot t\,;u_{12}-\frac{u_{12}-u_{22}}{\beta_2-\beta_1}\cdot\beta_2 t\right)$;

в области D_3 – вектором $\boldsymbol{U^*=}\left(\frac{u_{11}\beta_2-u_{12}\beta_1}{\beta_2-\beta_1};\ \frac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\right)$;

в области D_4 – $\boldsymbol{U^*=}\left(u_{21}-\frac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\cdot\beta_2 t;\ \frac{u_{21}-u_{11}}{\beta_2-\beta_1}\cdot t\right)$;

в области D_5 – $\boldsymbol{U^*=(u_{21};0)}$.

При равенстве $\beta_2=\beta_1$ оптимальными будут планы $X^*=(r(1-u);\frac{u}{k_1}r)$, где $0\le u\le 1$. Но это особый случай, который мы рассмотрим позже.

6. Зависимость предельных двойственных оценок ресурсов для случая, когда $k>k_2$

Рассмотрим зависимость предельных двойственных оценок ресурсов $u_1^*(r_1;r_2)$ для R_1 и $u_2^*(r_1;r_2)$ для R_2, когда $k>k_2$. Также как и для других случаев коэффициента k определим ОДР системы условий в двойственной задаче, полагая, что переменные двойственной задачи больше либо равны нуля ($u_1\ge 0,u_2\ge 0$).

ОДР строим в первой четверти плоскости u_1Ou_2. Границу решения первого неравенства обозначим γ_1, а второго неравенства γ_2. Тогда уравнение γ_1 будет иметь вид $a_{11}u_1+a_{21}u_2=c_1$, а уравнение γ_2: $a_{21}u_1+a_{22}u_2=c_2$.

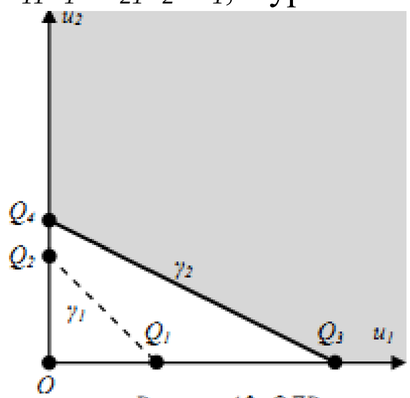

Рисунок 13. ОДР двойственной задачи при $k>k_2$

Строим точки пересечения прямых γ_1 и γ_2 с осями координат.

Как и ранее точка пересечения прямой γ_1 с осью Ou_1 будет точка $Q_1=(u_{11};0)$, а с осью Ou_2 точка $Q_2==(0;u_{12})$. Точка пересечения прямой γ_2 с осью Ou_1 будет точка $Q_3=(u_{21};0)$, а с осью Ou_2 точка $Q_4=(0;u_{22})$.

Рассмотрим отношение координат u_1 для точек Q_1 и Q_3: $\frac{u_{11}}{u_{21}}=\frac{c_1/a_{11}}{c_2/a_{12}}=\frac{a_{12}/a_{11}}{c_2/c_1}=\frac{k_1}{k}<1$. Это означает, что точка Q_1 лежит ближе от начала координат, чем точка Q_3 (рис. 13).

Также определим отношение для координат u_2 для точек Q_2 и Q_4: $\frac{u_{12}}{u_{22}}=\frac{k_2}{k}<1$. Это означает, что и точка Q_2 лежит ближе от начала координат, чем точка Q_4 (рис. 13). Тогда ОДР задачи будет область $u_1Q_3Q_4u_2$ (рис. 13).

6.1. Решение задачи для $r_2<\beta_2 r_1$

При $\beta<\beta_2$ решением двойственной задачи будет точка Q_4 (рис. 14). Оптимальные значения переменных: $\boldsymbol{u_1^*=0}$ и $\boldsymbol{u_2^*=u_{22}}$.

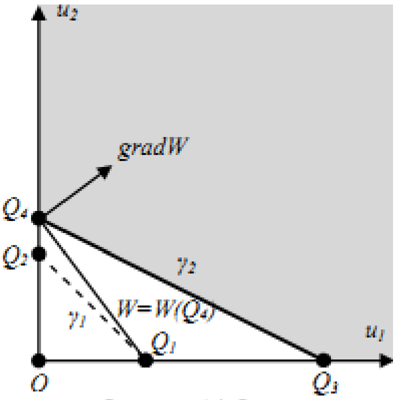

Рисунок 14. Решение двойственной задачи при $k>k_2$ и $r_2<\beta_2 r_1$

Найдём минимальное значение целевой функции в двойственной задаче. При $u_1*=0$, а $u_2*= u_{22}$. $W_{min}=r_1u_1*+r_2u_2*=r_2u_{22}$.

Находим решение прямой задачи. Так как $u_2*\neq 0$, то $a_{21}x_1*+a_{22}x_2*=r_2$. Так как $a_{21}u_1*+a_{22}u_2*>c_2$, то $x_2*=0$. Из этих условий получаем, что $x_1*= r_2/a_{21}$. В прямой задаче оптимальным будет план $X*=(r_2/a_{21};0)$. Введём ещё обозначения: $x_{21}= r_2/a_{21}$ и $x_{22}=r_2/a_{22}$. Тогда $X*=(x_{21};0)$.

Из этого решения получаем, что ресурс R_1 будет дефицитным ($u_2*\neq 0$). Определим категорию дефицитности ресурса R_1. Для этого вычислим y_1*. По определению значение y_1* равно: $y_1*=r_1-(a_{11}x_1*+a_{12}x_2*)=r_1-a_{11}r_2/ a_{21}=r_1 -r_2/ \beta_1=(\beta_1 r_1 - r_2)/ \beta_1$. Так как по предположению $r_2<\beta_1 r_1$, то и $y_1*= (\beta_1 r_1 -r_2)/ \beta_1>0$. Это означает, что ресурс R_1 будет избыточным.

Получаем, что когда $\beta<\beta_1$, то ресурс R_1 будет избыточным, а ресурс R_2 дефицитным.

6.2. Решение задачи для $r_2=\beta_2 r_1$

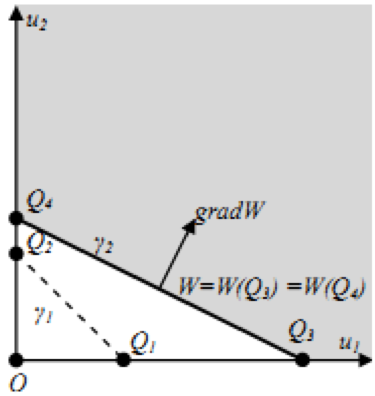

Рисунок 15. Решение двойственной задачи при $k>k_2$ и $r_2=k_2r_1$

Если $\beta=r_2/r_1=\beta_2$, тогда линии уровня целевой функции $W= r_1u_1+r_2u_2$ будут параллельны прямой γ_2. Решением двойственной задачи будут все точки отрезка $[Q_3Q_4]$. Запишем общее решение двойственной задачи, как точки отрезка $[Q_3Q_4]$ (рис. 15). Точку отрезка $[Q_3Q_4]$ можно представить как $U*= Q_3+t(Q_4 - Q_3)$, где $0\leq t\leq 1$. Отсюда находим координаты точек $U*$:

$u_1*=\frac{c_2}{a_{12}}\cdot(1-t) = u_{21}(1-t)$, а $u_2*=\frac{c_2}{a_{22}}t = u_{22}t$. Итак, при $\boldsymbol{r_2=\beta_2 r_1}$ предельные полезности ресурсов равны $\boldsymbol{u_1}*= u_{11}(1-t)$ и $\boldsymbol{u_2}*= u_{12}t$.

Найдём минимальное значение целевой функции в двойственной задаче: $W_{min}= r_1u_{21}(1-t)+r_2u_{22}t= r_1u_{21}+t\ (r_2u_{22} - r_1u_{21})$. Вычислим $r_2u_{22} - r_1u_{21}$: $r_2u_{22} -r_1u_{21}= r_1u_{22}\beta_2-r_1\ u_{21} =r_1\ (u_{22}\beta_2 -u_{21})=r_1\ (c_2a_{22}/(a_{22}a_{12}) -u_{21})= r_1(c_2/a_{12}-u_{21}) = =r_1(u_{21}-u_{21})=0$. Отсюда следует, что $W_{min}=r_1u_{11}$.

Найдём решение прямой задачи. Так как $r_2=\beta_2 r_1$, то положим $r_1=a_{12}r$, а $r_2=a_{22}r$. При этих значениях r_1 и r_2 в прямой задаче мы получим систему условий: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq a_{12}r \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq a_{22}r \end{cases}$ (3). Так как $\beta_2>\beta_1$, то оптимальным будет план $X*=(r;0)$.

При плане $X*=(r;0)$, значение y_1* равно 0. Вычислим остаток второго ресурса y_2*: $y_2*= a_{21}\ r - (a_{21}x_1*+a_{22}x_2*)=$
$=a_{21}\ r -a_{21}r=0$. Он тоже равен нулю.

Двойственные оценки предельных полезностей при некоторых значениях t обращаются в нуль, u_1* при $t=1$, u_2* при $t=0$. Это даёт основание проверить дефицитность обоих ресурсов.

Если увеличить запас ресурса R_1, перейдём к случаю $\beta<\beta_2$. Тогда $u_1*=0$, ресурс становится не дефицитным, а $y_1*>0$. Ресурс R_1 становится избыточным.

При $\beta=\beta_2$, производство насыщено потреблением ресурса R_1.

Если увеличить запас ресурса R_2, перейдём к случаю $\beta>\beta_2$. Этот случай рассмотрим в следующем пункте.

6.3. Решение задачи для $r_2>\beta_2r_1$

Рассмотрим случай, когда решением двойственной задачи будет точка Q_3 (рис. 16). Тогда отношение r_2/r_1 будет больше β_2. В этом случае получаем, что $r_2>\beta_1r_1$.

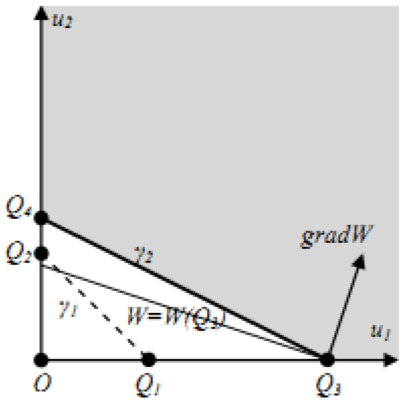

Рисунок 16. Решение двойственной задачи при $k>k_2$ и $r_2>\beta_2r_1$

При условии $\boldsymbol{r_2>\beta_2r_1}$ решением двойственной задачи будет точка Q_3 (рис. 16), координаты которой имеют значения $\boldsymbol{u_1*=c_2/a_{12}=u_{21}}$, а $\boldsymbol{u_2*=0}$. Минимальное значение целевой функции в двойственной задаче W равно:
$W_{min}= r_1u_{21}=Z_{max}$.

Найдём решение прямой задачи как и в пункте 4.1.Так как $u_1*\neq0$, то $a_{11}x_1*+a_{12}x_2*=r_1$. Так как $a_{21}u_1*+a_{22}u_2*\geq c_2$, то $x_2*=0$. Из этих условий получаем, что $x_1*= r_1/a_{11}$. В прямой задаче оптимальным будет план $X*=(r_1/a_{11};0)$. Определим $x_{11}= r_1/a_{11}$, $x_{12}= r_1/a_{12}$. Тогда $X*=(x_{11};0)$.

Из этого решения получаем, что ресурс R_1 будет дефицитным. Определим категорию дефицитности ресурса R_2. Для этого вычислим y_2*. По определению значение y_2* равно: $y_2*= r_2 – (a_{21}x_1*+a_{22}x_2*)=r_2– a_{21}r_1/ a_{11}=r_2 –r_1\beta_1$. Так как по предположению $r_2>\beta_1r_1$, то и $y_2*= r_2 –r_1\beta_1>0$. Это означает, что ресурс R_2 будет избыточным.

Отсюда получаем, что когда $\beta>\beta_2$, то ресурс R_1 будет дефицитным, а ресурс R_2 избыточным.

Вернёмся к случаю $\beta=\beta_2$. При увеличении запаса ресурса R_2 он переходит в категорию избыточного. Поэтому при $\beta=\beta_2$ производство насыщено потреблением ресурса R_2.

6.4. Карта предельных полезностей для $k>k_2$

Построим карту предельных полезностей для этой задачи при условии, что $k<k_1$. Мы получили решения этой задачи при различных соотношениях r_1 и r_2. Выпишем эти решения. Если $r_2<\beta_2r_1$, то $\boldsymbol{U*=(0;\ u_{22})}$. Если $r_2=\beta_2r_1$, то $\boldsymbol{U*=(}\ u_{21}\cdot(1-t)\,;u_{22}t\boldsymbol{)}$. Если $r_2>\beta_2r_1$, то $\boldsymbol{U*=(u_{21};0)}$.

Строим карту предельных полезностей по этим решениям (рис. 17). В первой четверти плоскости r_1Or_2 строим прямую $r_2=\beta_2r_1$, которая определяет в четверти три области: 1) область D_1: $r_2<\beta_2r_1$; 2) область D_2:$r_2=\beta_2r_1$;
3) область D_3: $r_2>\beta_2r_1$. Тогда в D_1 двойственные оценки предельных полезностей равны: $\boldsymbol{U*=(0;u_{22})}$; в D_2 – оценки полезностей равны $\boldsymbol{U*=(}\ u_{21}\cdot(1-t)\,;u_{22}t\boldsymbol{)}$; в D_3 – оценки равны $\boldsymbol{U*=(u_{21};0)}$.

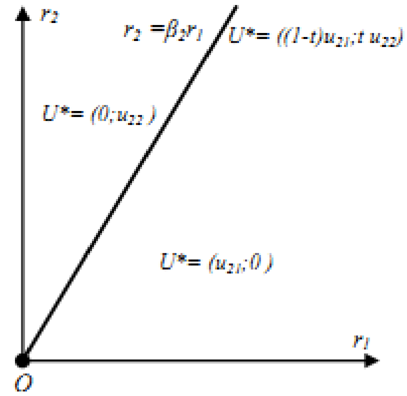

Рисунок 17. Карта предельных полезностей для $k>k_2$

Категории ресурсов в областях будут иметь характер: 1) в области D_1 ресурс R_1 избыточный, а ресурс R_2 дефицитный; 2) в области D_2 для обоих ресурсов производство насыщено использованием этих ресурсов; 3) в области D_3 ресурс R_1 дефицитный, а ресурс R_2 избыточный.

7. Зависимость предельных двойственных оценок ресурсов в особых случаях

Рассмотрим зависимость предельных двойственных оценок ресурсов в особых случаях, когда $k=k_1$, $k=k_2$ и $k=k_1=k_2$. Сначала определимся с ОДР в двойственной задаче для этих случаев.

При $k=k_1$ и $k_1 \neq k_2$ точки пересечения прямых γ_1 и γ_2 с осью Ou_1 совпадут.

Действительно, отношение $\frac{u_{11}}{u_{21}}$ будет равно: $\frac{u_{11}}{u_{21}} = \frac{k_1}{k} = 1$. Поэтому $Q_1 = Q_3$. Точки пересечения прямых γ_1 и γ_2 с осью Ou_2 будут располагаться следующим образом. Отношение $\frac{u_{12}}{u_{22}}$ для точек Q_2 и Q_4 будет равно: $\frac{u_{12}}{u_{22}} = \frac{k_2}{k} > 1$. Это означает, точка Q_2 лежит дальше от начала координат, чем точка Q_4. Этот случай мы уже рассматривали при $k<k_1$. Получаем, что при $k=k_1$ ОДР задачи будет область $u_1Q_1Q_2u_2$ (рис. 18).

При $k=k_2$ и $k_1 \neq k_2$ совпадут точки пересечения прямых γ_1 и γ_2 с осью Ou_2, так как отношение $\frac{u_{12}}{u_{22}} = \frac{k_2}{k} = 1$. Поэтому $Q_2 = Q_4$. Для точек Q_1 и Q_3 отношение $\frac{u_{11}}{u_{21}} = \frac{k_1}{k} < 1$. Что означает, точка Q_3 лежит дальше от начала координат, чем точка Q_1. Этот случай мы тоже уже рассматривали при $k>k_2$. Получаем, что при $k=k_2$ ОДР задачи будет область $u_1Q_3Q_4u_2$ (рис. 19).

В случае, когда $k=k_1=k_2$ совпадут как точки пересечения прямых γ_1 и γ_2 с осью Ou_1 Q_1 и Q_3, так и точки пересечения прямых γ_1 и γ_2 с осью Ou_2, точки Q_2 и Q_4 (рис. 20) . В этом случае ($k=k_1=k_2$) ОДР задачи будет область $u_1Q_1Q_2u_2$ (рис. 20). ОДР также можно записать как $u_1Q_3Q_4u_2$.

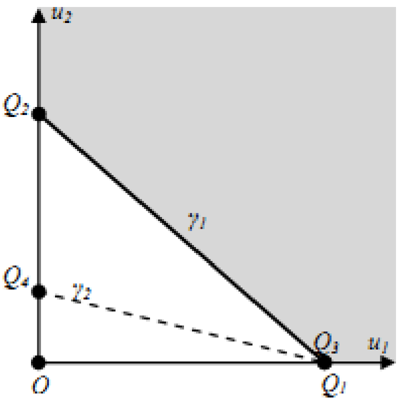

Рисунок 18. ОДР двойственной задачи при $k=k_1$

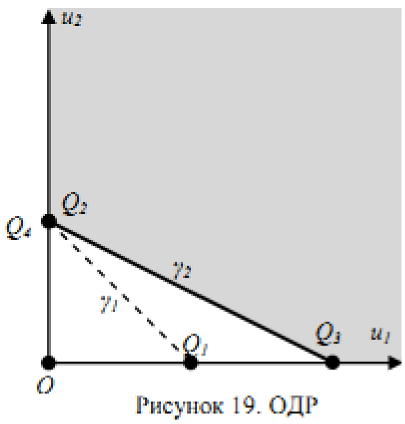

Рисунок 19. ОДР двойственной задачи при $k=k_2$

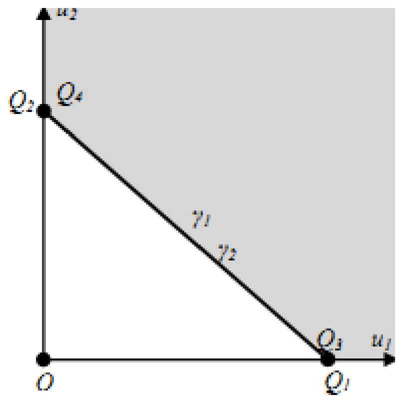

Рисунок 20. ОДР двойственной задачи при $k=k_1=k_2$

Для решения прямой задачи на плоскости x_1Ox_2 для всех трёх случаев, определим точки: $X_1=(x_{11};0)$, $X_2=(0;x_{12})$, $X_3=(x_{21};0)$, $X_4=(0;x_{22})$. Также в этот список включим точку $X_0=(x_{10};x_{20})$, координаты которой равны: $x_{10}=\frac{k_2x_{11}-k_1x_{21}}{k_2-k_1}$; $x_{20}=\frac{x_{21}-x_{11}}{k_2-k_1}$. Прямую X_1X_2 обозначим l_1, а X_3X_4 обозначим l_2.

7.1. Решение задачи для $k=k_1$

При $\beta<\beta_1$ решением двойственной задачи будет точка Q_2 (рис. 2). Оптимальные значения переменных: $\boldsymbol{u_1*=0}$ и $\boldsymbol{u_2*=u_{12}}$. Минимальное значение целевой функции будет равно: $W_{min}=r_2u_{12}$.

Найдём решение прямой задачи. Так как $u_2*\neq 0$, то $a_{21}x_1*+a_{22}x_2*=r_2$. Так как $a_{21}u_1*+a_{22}u_2*>c_2$, то $x_2*=0$. Из этих условий получаем, что $x_1*= r_2/a_{21}$. В прямой задаче оптимальным будет план $X*=X_3= (x_{21};0)$. Вычислим y_1*: $y_1*=r_1–(a_{11}x_{21}+a_{12}\cdot 0) =r_1– a_{11}x_{21}= =r_1– a_{11}\, r_2/a_{21}=r_1–r_2/\beta_1=(\beta_1r_1–r_2)/\beta_1>0$, так как $\beta_1r_1–r_2>0$.

Из этого решения получаем, что ресурс R_2 будет дефицитным ($u_2*\neq 0$). Ресурс R_1 будет избыточным ($y_1*>0$).

Если $\beta=\beta_1$, то решением двойственной задачи будут точки $U*$, такие что $u_1*=u_{11}(1–t)$, а $u_2*= u_{12}t$, где $0\leq t\leq 1$. Минимальное значение целевой функции $W_{min}=r_1u_{11}$. Найдём решение прямо задачи при $k=k_1$ и $\beta=\beta_1$. Прямая задача в этом случае будет иметь вид:

$$Z = c_1x_1 + c_1k_1x_2 \to \max$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{11}k_1x_2 \leq r_1 \\ a_{11}\beta_1x_1 + a_{11}\beta_1k_2x_2 \leq \beta_1r_1 \end{cases} (7).$$

Задача (7) будет равносильна задаче:

$$Z = c_1(x_1 + k_1x_2) \to \max$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 + k_1x_2) \leq r_1 \\ a_{11}\beta_1(x_1 + k_2x_2) \leq \beta_1r_1 \end{cases} (8).$$

Найдём точку пересечения прямых l_1 и l_2 из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 + k_1x_2) = r_1 \\ a_{11}\beta_1(x_1 + k_2x_2) = \beta_1r_1 \end{cases} (9).$$

Преобразуя её, получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 + k_1x_2 = x_{11} \\ x_1 + k_2x_2 = x_{11} \end{cases} (10).$$

Решением этой системы будет план $X_1 =(x_{21};0) =(x_{11};0)= X_3$. План X_1 совпадает с планом X_3.

План X_4 лежит к началу координат ближе, чем X_2, так как $x_{11}/k_2< x_{11}/k_2$. Поэтому ОДР будет треугольник $X_3O\, X_4$. Вычислим значение Z в точках X_2 и X_4: $Z(X_2)$ и $Z(X_4)$. $Z(X_2) =c_1x_{11}$, $Z(X_4) = c_2x_{11}/k_2= c_1x_{11}k_1 /k_2$, что меньше, чем $Z(X_2) =c_1x_{11}$. Значит X_2 оптимальный план и $Z_{mx}=c_1x_{11}$. В итоге получаем, что $y_1*=y_2*=0$.

В итоге мы получили, что оба ресурса расходуются полностью, среди предельных двойственных оценок ресурсов есть нулевые оценки.

Рассмотрим случай, когда $\beta_1 < \beta < \beta_2$. Решением двойственной задачи будет точка Q_1, $\boldsymbol{u_1*=u_{11}}$, а $\boldsymbol{u_2*=0}$. Минимальное значение целевой функции в двойственной задаче W равно: $W_{min}= r_1u_{11}$.

Прямая задача в этом случае будет иметь вид:

$$Z = c_1x_1 + c_1k_1x_2 \quad \to \max$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{11}k_1x_2 \leq r_1 \\ a_{11}\beta_1x_1 + a_{11}\beta_1k_2x_2 \leq \beta r_1 \end{cases} (11).$$

Если $\beta_1 < \beta < \beta_2$, то ОДР в этой задаче будет четырёхугольник $OX_1X_0X_4$, где X_0 точка пересечения прямых l_1 и l_2, определяемая системой уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 + k_1x_2) = r_1 \\ a_{11}\beta_1(x_1 + k_2x_2) = \beta r_1 \end{cases} (12).$$

Оптимальными планами будут все точки отрезка $[X_1\ X_0]$, так как для любой точки X прямой l_1 $Z(X)=c_1(x_1+k_1x_2)=c_1r_1/a_{11}= c_1x_{11}$, а $Z(X_4)<c_1x_{11}$, если $\beta<\beta_2$. Значит, оптимальными будут планы $X^*=((1-t)x_{10}+tx_{11};(1-t)x_{20})$, где $0\leq t\leq 1$.

Остатки обоих ресурсов y_2* равны нулю ($y_1*= y_2*=0$).

В результате м получаем уникальный случай, когда оба ресурса расходуются полностью при оптимальном плане, двойственная оценка ресурса R_1 отлична от нуля, а ресурса R_2 равна нулю.

Уникальность состоит в том, что с увеличением запаса ресурса R_2 он расходуется полностью при оптимальном плане, а его двойственная оценка равняется нулю.

При $\beta>\beta_2$ решением двойственной задачи остаётся точка Q_1, $\boldsymbol{u_1*=u_{11}}$, а $\boldsymbol{u_2*=0}$. Минимальное значение целевой функции в двойственной задаче W равно: $W_{min}= r_1u_{11}$.

ОДР в этом случае будет треугольник $X_1O\ X_2$. А оптимальными будут все планы отрезка $[X_1\ X_2]$. Их запишем как $X^*=(tx_{11};(1-t)x_{12})$, где $0\leq t\leq 1$.

В этом случае ресурс R_2 становится избыточным, а ресурс R_1 дефицитным.

Подводя итоги для случая $k=k_1$, скажем, что при $\beta<\beta_1$, ресурс R_1 будет избыточным, а R_2 дефицитным, при $\beta=\beta_1$ – производство будет насыщено потреблением обоих ресурсов, при $\beta_1< \beta<\beta_2$ – ресурс R_1 будет дефицитным, для ресурса R_2 производство насыщено его потреблением, при $\beta>\beta_2$ – уже ресурс R_2 будет избыточным, а R_1 дефицитным.

Карта предельных полезностей для случая $k=k_1$ совпадает с картой предельных полезностей для случая $k<k_1$.

Случай, когда $k=k_2$ аналогичен, только там расчёты и выводы для ресурсов поменяются местами.

Для случая $k=k_2$, скажем, что при $\beta>\beta_2$, ресурс R_2 будет избыточным, а R_1 дефицитным, при $\beta=\beta_2$ – производство будет насыщено потреблением обоих ресурсов, при $\beta_1< \beta<\beta_2$ – ресурс R_2 будет дефицитным, для ресурса R_1 производство будет насыщено его потреблением, при $\beta<\beta_1$ – уже ресурс R_1 будет избыточным, а R_2 дефицитным.

Карта предельных полезностей для случая $k=k_2$ совпадает с картой предельных полезностей для случая $k>k_2$.

7.2. Решение задачи для $k=k_1=k_2$

Особенностью случая $k_1=k_2$ является тот факт, что $\beta_1=\beta_2$. Тогда пара двойственных задач примет вид:

прямая задача:

$$Z = \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \to \max$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{11}k_1x_2 & \leq & r_1 \\ a_{11}\beta_1 x_1 & + a_{11}\beta_1 k_1 x_2 & \leq & r_2 \end{cases} \quad (13);$$

двойственная задача:

$$W = \quad r_1 u_1 + r_2 u_2 \quad \to \max$$

$$u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1 & + a_{11}\beta_1 u_2 & \geq & c_1 \\ a_{11}k_1 u_1 & + a_{11}k_1\beta_2 u_2 & \geq & c_2 \end{cases} \quad (14).$$

Преобразуем эти задачи и запишем в следующих видах:

$$Z = \quad c_1 x_1 + c_1 k x_2 \quad \to \max$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 + k_1 x_2) & \leq r_1 \\ a_{11}\beta_1(x_1 + k_1 x_2) & \leq r_2 \end{cases} \quad (15);$$

двойственная задача:

$$W = \quad r_1 u_1 + r_1 \beta u_2 \quad \to \max$$

$$u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}(u_1 + \beta_1 u_2) & \geq c_1 \\ a_{11}k_1(u_1 + \beta_1 u_2) & \geq c_2 \end{cases} \quad (16).$$

Если $k<k_1=k_2$, то ОДР в двойственной задаче будет совпадать с ОДР для случая $k<k_1$, когда $k_1 \neq k_2$. Если же $k>k_1$, то ОДР в двойственной задаче будет совпадать с ОДР для случая $k>k_2$, когда $k_1 \neq k_2$. Эти задачи мы уже решили и там решения следующие.

Для $k<k_1=k_2$. При $\beta<\beta_1$ решением двойственной задачи будет точка $Q_2=(0;u_{12})$, в прямой – план $X_3=(x_{21};0)$. Ресурс R_1 избыточный, а ресурс R_2 дефицитный.

При $\beta=\beta_1$ решением двойственной задачи будет отрезок $[Q_1Q_2]$: $Q^*=(tu_{11};(1-t)u_{12})$, где $0 \leq t \leq 1$. В прямой задаче прямые l_1 и l_2 совпадут. Решением будет план $X_3=(x_{21};0)=(x_{11};0)=X_1$.

Производство будет насыщено использованием обоих ресурсов.

При $\beta>\beta_1$ решением двойственной задачи будет точка $Q_1=(u_{11};0)$, в прямой – план $X_1=(x_{11};0)$. Ресурс R_1 будет дефицитным, а ресурс R_2 избыточным.

Для $k>k_1=k_2$. При $\beta<\beta_1$ решением двойственной задачи будет точка $Q_4=(0;u_{22})$, в прямой – план $X_4=(0;x_{22})$. Ресурс R_1 избыточный, а ресурс R_2 дефицитный.

При $\beta=\beta_1$ решением двойственной задачи будет отрезок $[Q_3Q_4]$: $Q^*=(tu_{21};(1-t)u_{22})$, где $0\leq t\leq 1$. В прямой задаче прямые l_1 и l_2 совпадут. Решением будет план $X_4=(0;x_{22})=(0;x_{12})=X_2$.

Производство будет насыщено использованием обоих ресурсов.

При $\beta>\beta_1$ решением двойственной задачи будет точка $Q_3=(u_{21};0)$, в прямой – план $X_2=(0;x_{12})$. Ресурс R_1 будет дефицитным, а ресурс R_2 избыточным.

Отметим, что при $k\neq k_1=k_2$ в оптимальном плане производится только один вид продукции: при $k<k_1$ только продукция первого вида, а при $k>k_1$ только продукция второго вида.

Осталось рассмотреть случай, когда $k=k_1=k_2$. Тогда прямая задача примет вид:

$$Z = c_1x_1 + c_1kx_2 \to \max$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}(x_1+kx_2) & \leq r_1 \\ a_{11}\beta_1(x_1+kx_2) & \leq \beta r_1 \end{cases} \quad (17);$$

Соответственно двойственной будет задача:

$$W = r_1u_1 + r_1\beta u_2 \to \max$$

$$u_1 \geq 0 \quad u_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}(u_1+\beta_1u_2) & \geq c_1 \\ a_{11}k(u_1+\beta_1u_2) & \geq kc_1 \end{cases} \quad (18).$$

В двойственной задаче прямые γ_1 и γ_2 совпадут. Значит, совпадут и точки Q_1 и Q_3, а также Q_2 и Q_4.

Пусть $\beta<\beta_1=\beta_2$. Решением двойственной задачи будет точка $Q_2=Q_4=(0;u_{21})$, в прямой – план $X_4=(0;x_{22})$. Ресурс R_1 избыточный, а ресурс R_2 дефицитный.

При $\beta=\beta_1=\beta_2$. Решением двойственной задачи будет отрезок $[Q_1Q_2]$: $Q^*=(tu_{11};(1-t)u_{12})=(tu_{21};(1-t)u_{22})$, где $0\leq t\leq 1$. В прямой задаче прямые l_1 и l_2 совпадут. Решением будет отрезок $[X_1X_2]=[X_3X_4]$: $X^*=((1-t)x_{11};tx_{12})=((1-t)x_{21};tx_{22})$, где $0\leq t\leq 1$.

Производство будет насыщено использованием обоих ресурсов.

При $\beta>\beta_1=\beta_2$ решением двойственной задачи будет точка $Q_1=Q_3=(u_{11};0)$, в прямой – план $X_1=(x_{11};0)$. Ресурс R_1 будет дефицитным, а ресурс R_2 избыточным.

Отметим, что при $k=k_1=k_2$ в оптимальном плане производится только один вид продукции, если $\beta\neq\beta_1=\beta_2$: при $\beta<\beta_1$ только продукция второго вида, а при $\beta>\beta_1$ только продукция первого вида.

Если $\beta=\beta_1=\beta_2$, то проявляется полная неопределённость в производстве продукции и оценках ресурсов. Задача имеет множество оптимальных планов и предельные двойственные оценки ресурсов неоднозначны.

С другой стороны, это отношение запасов ресурсов определяет стратегию предприятия для ресурсов, которые пропорционально расходуются по видам продукции. Эти ресурсы можно заменить при расчётах одним ресурсом, а потребление второго будет определяться пропорцией $\beta=\beta_1=\beta_2$. И оцениваться сразу будут оба ресурса, в предположении, что они расходуются совместно.

8. Стратегии эффективного использования ресурсов

В производстве ресурсы используются в зависимости от отношений запасов ресурсов и отношения показателей эффективности производства видов продукции.

Когда отношение показателей эффективности производства k меньше минимального k_1 или больше максимального отношения k_2 расхода ресурсов по видам продукции, то тогда расход ресурсов определяет их рациональное использование в пропорциях β, которые задаются минимальным отношением β_1 среди видов продукции в первом случае и максимальным отношением β_2 во втором случае.

Когда отношение показателей эффективности производства k больше минимального k_1 или меньше максимального отношения k_2 расхода ресурсов по видам продукции, то тогда расход ресурсов определяет их рациональное использование в пропорциях β, которые задаются между минимальным отношением β_1 среди видов продукции и максимальным отношением β_2.

Совпадение отношения показателей эффективности производства k совпадает с минимальным отношение k_1 или максимальным отношением k_2 расхода ресурсов по видам продукции, то тогда расход ресурсов определяет их рациональное использование в пропорциях β, которые равны соответственно минимальному отношению β_1 среди видов продукции и максимальному отношению β_2. При этом возможен эффект оптимального расширения производства за счёт увеличения запаса одного из ресурсов, не увеличивая показатель эффективности производства.

Библиографический список

1. Р.Ш. Хуснутдинов.Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 224 с., 500 экз.
2. В.В. Федосеев. Экономико-математические модели и прогнозирование рынка труда: Учеб. пособие - 2-е изд., доп. и испр. - М.: Вузовский учебник, 2010. - 144 с., 500 экз.
3. О.А. Сдвижков. Практикум по методам оптимизации - М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 200 с., 500 экз.
4. Экономико-математические методы в примерах и задачах: Учеб. пос. / А.Н.Гармаш, И.В.Орлова, Н.В.Концевая и др.; Под ред. А.Н.Гармаша - М.: Вуз. уч.: НИЦ ИНФРА-М, 2014 - 416с., 700 экз.
5. Экономическая теория. Микроэкономика: Учебник/ Под ред. Г. П. Журавлёвой - ИТК «Дашков и К, 2014. - 914 с.
6. Экономика: Учебник/ Под ред. А. С. Булатова - Юристъ, 2002. - 896 с.
7. В.В. Федосеев. Экономико-математические модели и прогнозирование рынка труда: Учеб. пособие - 2-е изд., доп. и испр. - М.: Вузовский учебник, 2010. - 144 с., 500 экз.
8. О. В. Мамонов. Анализ использования двух ресурсов предприятия с двумя видами продукции с помощью графического способа решения задачи линейного программирования: Агропродовольственная экономика: научно-практический электронный журнал. Нижний Новгород: НОО «Профессиональная наука» - No10 - 2016. – 7-42 с.